Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 6

Sommersemester 2008

Aufgabe 21 (Strikte Komplementarität) (schriftlich – 4 Punkte)

Gegeben seien die zueinander dualen linearen Programme

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad c^T x \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}\,,$$
$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad b^T y \quad \text{auf} \quad N := \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq c\}\,.$$

Die Probleme (P) und (D) seien beide zulässig und $M^* \subset M$ und $N^* \subset N$ bezeichnen die jeweiligen Lösungsmengen. Zeigen Sie:

(a) Falls zu beliebigem, aber festem $k \in \{1, ..., n\}$ kein $y^* \in N^*$ existiert mit $(c - A^T y^*)_k > 0$, so existiert ein $x^* \in M^*$ mit $(x^*)_k > 0$. Betrachten Sie dazu die zueinander dualen linearen Programme

$$(\tilde{D}) \quad \text{Max.} \quad -(e^k)^T A^T y \quad \text{auf} \quad \tilde{N} := \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \begin{bmatrix} A^T \\ -b \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ -\max(D) \end{bmatrix} \right\},$$
$$(\tilde{P}) \quad \text{Min.} \quad c^T u - \lambda \max(D) \quad \text{auf}$$
$$\tilde{M} := \left\{ (u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = -Ae^k, \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} \geq 0 \right\}.$$

(b) Es gibt ein $(x^*, y^*) \in M^* \times N^*$ mit $x^* + c - A^T y^* > 0$.

Aufgabe 22 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe

$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad y_1 + y_2 \quad \text{unter} \quad y \geq 0\,, \; -y_1 - y_2 \geq -1\,.$$

(a) Bestimmen Sie das duale Problem von (D).

(b) Lösen Sie (D) sowie sein duales Problem.

(c) Bestimmen Sie ein strikt komplementäres und ein nicht strikt komplementäres Lösungpaar zu (D) und seinem dualen Programm.

Aufgabe 23 (schriftlich – 2 Punkte)

Betrachten Sie die zueinander dualen Problem (P) und (D) aus Aufgabe 21. Diese seien lösbar, d.h. es gibt $x^* \in \mathbb{R}^n$ und $y^* \in \mathbb{R}^m$ mit $c^T x^* = \min(P)$ und $b^T y^* = \max(D)$. Zudem sei $\varepsilon \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe des Dualitätssatzes, dass für alle $x \in M$ und $y \in N$, die $x^T(c - A^T y) \leq \varepsilon$ erfüllen, folgende Ungleichungen gelten:

$$c^T x^* \leq c^T x \leq c^T x^* + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad b^T y^* - \varepsilon \leq b^T y \leq b^T y^*\,.$$

Aufgabe 24 (mündlich)

Ein Netzwerk-Administrator muss jeden Tag eine große Menge Daten von Server A zu Server F senden. Dazu müssen die Daten aber über einige andere Server umgeleitet werden, da keine direkte Verbindung zwischen A und F besteht. Die Leitungen zwischen den einzelnen Servern sind aber unterschiedlich gut ausgebaut. Zudem wird eine asynchrone Datenübertragung benutzt, so dass die Daten nur in eine Richtung schnell übertragen werden können. Deshalb wird näherungsweise davon ausgegangen, dass die Kanten des zugehörigen Netzwerkgraphen gerichtet sind. Die Kapazitäten der einzelnen Verbindungen (in MBit) sind folgender Tabelle zu entnehmen:

Quelle \ Ziel	B	C	D	E	F
A	20	60	30	0	0
B	0	0	0	0	70
C	20	0	50	20	0
D	0	0	0	30	10
E	60	0	0	0	50

(a) Helfen Sie dem Administrator einen möglichst hohen Datendurchsatz zu erreichen, damit der Datentransfer in schnellst möglicher Zeit abgewickelt werden kann. Welcher Datendurchsatz kann erreicht werden.

(b) Durch zusätzliche Ressourcen könnte der Administrator die Kapazität von einer der Verbindungen um 30 MBit erhöhen. Für welche Verbindung soll er sich entscheiden?

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 23. Mai 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage: http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung