Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 7

Sommersemester 2008

Aufgabe 25 (schriftlich – 4 Punkte)

Eine Ware soll von m Produktionsstellen $P_1, ..., P_m$ zu n Verkaufsstellen $V_1, ..., V_n$ möglichst kostengünstig transportiert werden. An Produktionsstelle P_i werden a_i Einheiten der Ware produziert, und an Verkaufsstelle V_j sollen b_j Einheiten verkauft werden. Weiter soll gelten, dass die Gesamtproduktion der Gesamtnachfrage entspricht, d.h. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_i$. Die Transportkosten von P_i nach V_j betragen $c_{ij} \geq 0$ und die Menge der transportierten Ware zwischen P_i und V_j sei mit $x_{ij} \geq 0$ bezeichnet. Zu minimieren sind die Transportkosten $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

(a) Formulieren Sie das primale und duale Problem.

(b) Zeigen Sie, dass es im primalen Problem genau eine redundante Gleichheitsnebenbedingung gibt, d.h. falls genau eine Gleichheitsnebenbedingung weggelassen wird, sind die restlichen $n + m - 1$ Gleichheitsnebenbedingungen linear unabhängig.

Aufgabe 26 (schriftlich – 4 Punkte)

R(udi) und C(arla) zelten gerne im Gebirge. R mag die Berge und C mag die Täler. Deshalb ist die Wahl des Campingplatzes schwierig für die beiden. Das Gebiet in dem sie zelten wollen wird von $n \in \mathbb{N}$ Wegen in Ost-West- und $m \in \mathbb{N}$ Wegen in Nord-Süd-Richtung durchzogen. Sie beschließen an einer Kreuzung zu zelten, und als Kompromiss einigen sie sich darauf, dass R den Ost-West-Weg wählen darf und C den Nord-Süd-Weg. Zudem kennen sie aus den vorher beschafften Karten die Höhenlagen der Kreuzungen.

(a) Formulieren Sie obigen Sachverhalt als ein Zwei-Personen-Matrixspiel. Dabei versucht R möglichst hoch zu zelten, hingegen C möglichst niedrig.

(b) Überlegen Sie sich, ob das Matrixspiel fair ist, bzw. was als fairer Ausgang interpretiert werden könnte.

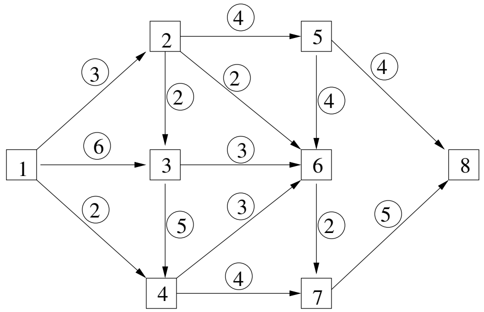
(c) Betrachten Sie folgendes Beispiel für $n = m = 4$: In der folgenden Tabelle stehen die Höhenmeter der Kreuzungen.

Ost-West \ Nord-Süd	Weg 1	Weg 2	Weg 3	Weg 4
Weg 1	3500	1000	2500	500
Weg 2	1000	1000	1500	2000
Weg 3	2500	1500	2000	2000
Weg 4	1500	1000	500	3000

Zeigen Sie, dass in diesem Gebirge ein Sattelpunkt-Spiel entsteht. Bestimmen Sie die zugörigen reinen Strategien und finden Sie heraus, auf wie vielen Metern die beiden zelten, wenn sie diese Strategien wählen.

Aufgabe 27 (mündlich)

Bestimmen Sie den maximalen Fluss in folgendem Netzwerk und bestimmen Sie einen minimalen Schnitt. Starten Sie mit dem trivialen Fluss $X = 0$.



Aufgabe 28 (mündlich)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A = -A^T$. Weiter sei $c \in \mathbb{R}^n$ und $b = -c$. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$(P') \qquad \text{Minimiere} \quad c^T x \quad \text{mit} \quad x \in M' := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}.$$

Zeigen Sie:

(a) (P') ist selbstdual, d.h. das duale Problem von (P') ist äquivalent zu (P').

(b) Falls $M' \neq \emptyset$, so besitzt (P') eine optimale Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ und $c^T x^* = 0$.

(c) Geben Sie ein primal-duales Paar linearer Programme an, von denen keines eine zulässige Lösung besitzt.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 30. Mai 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage: http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung