Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I **Lösungen zu Übungsblatt 13**
Sommersemester 2008

Aufgabe 54 (mündlich)
Betrachten Sie die nichtlineare Optimierungsaufgabe

$$(P_a) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad h(x) = a\,,$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}^m$. Dabei seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar. Für $a = 0$ habe (P_a) eine Lösung x^* mit zugehörigem Lagrange-Multiplikator v^* und x^* erfülle die (CQ2) Bedingung. Zudem gelte $y^T D_x^2 L(x^*, v^*) y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Dh(x^*)y = 0$, d.h. $D_x^2 L(x^*, y^*)$ ist auf dem Kern der Jacobi-Matrix von h in x^* positiv definit. Betrachten Sie außerdem die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, gegeben durch $\Phi_a(x, v) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + Dh(x)^T v \\ h(x) - a \end{bmatrix}$. Zeigen Sie:

(a) Die Jacobi-Matrix von Φ_a ist regulär in (x^*, v^*).

(b) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle a in der offene Kugel $S = \{\widehat{a} \in \mathbb{R}^m : \|\widehat{a}\| < \varepsilon\}$ ein $x(a) \in \mathbb{R}^n$ und ein $v(a) \in \mathbb{R}^m$ gibt mit den Eigenschaften: $x(a)$ ist Lösung von (P_a) mit zugehörigem Lagrange-Multiplikator $v(a)$ und es gilt $x(0) = x^*$ sowie $v(0) = v^*$. *Hinweis:* Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen.

(c) Für die primale Kostenfunktion $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $P(a) = f(x(a))$ gilt: $\nabla P(a) = -v(a)$.

Lösung:

(a) Die Jacobi-Matrix von Φ ist in (x^*, v^*) ist gegeben durch $D\Phi(x^*, v^*) = \begin{bmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ mit $Q = D_x^2 L(x^*, v^*) = D_x^2 f(x^*, v^*) + \sum_{i=1}^m v_i^* D^2 h(x^*)$ und $A = Dh(x^*)$. Wir zeigen, dass falls $D\Phi(x^*, v^*) \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = 0$ gilt, dann auch $x = 0, v = 0$ gelten muss. Wir schreiben die Gleichungen als

$$Qx + A^T v = 0 \qquad Ax = 0\,.$$

Offenbar ist $x \in \operatorname{Ker}(A)$. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit x^T von links und erhalten

$$0 = x^T Q x + x^T A v = x^T H x\,.$$

Da Q auf dem Kern von A positiv definit ist, folgt $x = 0$. Da $x = 0$ muss auch $A^T v = 0$ gelten und weil die (CQ2) Bedingung für x^* erfüllt ist, hat A maximalen Rang, d.h. aus $A^T v = 0$ folgt sofort $v = 0$, was zu zeigen war.

(b) Wir betrachten die Abbildung $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $H(x, v, a) = \Phi_a(x, v)$. Es gilt $H(x^*, v^*, 0) = 0$ und die Jacobi-Matrix von H bzgl. (x, v) in regulär in (x^*, v^*), d.h.

$$\frac{\partial H(x^*, v^*, 0)}{\partial(x, v)} = D\Phi(x^*, v^*)$$

hat vollen Rang. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren dann ein offene Umgebungen U um (x^*, v^*) und V um $a = 0$ sowie ein stetig differenzierbar Funktion $(x(a), v(a))$ mit $(x(0), v(0)) = (x^*, v^*)$ und es gilt $H(x(a), v(a), a) = 0$, d.h. in unserem Fall

$$(*) \qquad \nabla_x f(x(a)) + \nabla_x h(x(a)) v(a) = 0\,, \qquad h(x(a)) = a\,.$$

Dies sind gerade die KKT-Bedingungen von (P_a) für $(x(a), v(a))$.

(c) Wir multiplizieren die erste Gleichung in $(*)$ mit $\nabla_a x(a)$ und erhalten

$$\nabla_a x(a) \nabla_x f(x(a)) + \nabla_a x(a) \nabla_x h(x(a)) v(a) = 0\,.$$

Da $h(x(a)) = a$ erhalten wir durch Ableiten

$$I = \nabla_a x(a) \nabla_x h(x(a))$$

Mit der Kettenregel folgt dann

$$\nabla_a p(a) = \nabla_a (f(x(a))) = \nabla_a x(a) \nabla_x f(x(a))\,.$$

Zusammen erhalten wir dann $\nabla_a p(a) + v(a) = 0$.