



Optimierungstheorie I

Sommersemester 2008

Lösungen zu Übungsblatt 8

Aufgabe 32

(mündlich)

Betrachten Sie zu $c \in \mathbb{R}^n$ das lineare Programm

$$(P) \quad \text{Minimiere } c^T x \quad \text{unter } 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

- (a) Zeigen Sie, dass Phase II des Simplex-Verfahrens höchstens n Schritte zum Auffinden der Lösung benötigt.
- (b) Formulieren Sie das duale Problem und überprüfen Sie, ob sich für dieses ebenfalls direkt Phase II anwenden lässt.

Lösung:

- (a) Schlupfvariablen führen zu der Normalform

$$(P) \quad \text{Minimiere } c^T x \quad \text{unter } [I \quad I] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = e, \quad \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \geq 0,$$

und das erste Tableau sieht somit folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{cccccccc|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Da die Matrix (ohne den Kostenvektor) in jeder Spalte nur ein Nicht-Null-Element besitzt, ändert sich in jedem Schritt also nur der Kostenvektor. Da die Spalte $j \in \{1, \dots, 2n\}$ nur dann Pivotspalte wird wenn $c_j < 0$, wird jede Spalte aufgrund der Diagonalgestalt der Matrix höchstens einmal pivotisiert. Da $c \in \mathbb{R}^n$ kann es also maximal n Schritte geben. Genauer gibt es $|\hat{J}|$ Schritte, wobei $\hat{J} = \{i \in \{1, \dots, n\} : c_i < 0\}$

- (b) Das duale Problem ist

$$(D) \quad \text{Maximiere } e^T \tilde{y} \quad \text{unter } \tilde{y} \leq c, \quad \tilde{y} \leq 0$$

Einführen von $y = -\tilde{y}$ und Schlupfvariablen w ergibt das System

$$-\text{Minimiere } e^T y \quad \text{unter } [-I \quad I] \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = c, \quad \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} \geq 0.$$

Die Form von (D) ist ähnlich zu der des primalen Problems. Da i.A. $c \geq 0$ nicht gelten muss, müssen alle \hat{J} Zeilen mit -1 durchmultipliziert werden. Da in jeder Zeile aber einmal 1 und einmal -1 steht, lässt sich immer noch direkt eine Basislösung angeben. Da sich der Kostenvektor dadurch nicht ändert und größer gleich 0 ist, kann man die Lösung direkt angeben.