2.1 Konvexe Mengen und Polyeder – Konvexe Mengen

(2.1) a) Eine Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt *linearer Teilraum / Unterraum*, wenn

$$x, y \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda x + \mu y \in V.$$

b) Eine Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt *affiner Teilraum*, wenn

$$x, y \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)x + \lambda y \in V.$$

c) Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn

$$x, y \in K, \quad \lambda \in [0,1] \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)x + \lambda y \in K.$$

d) Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Kegel*, wenn

$$x \in C, \quad \lambda \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda x \in C.$$

(2.2) a) $V \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein linearer Teilraum, wenn

$$x^i \in V,\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,\ m \text{ beliebig} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in V.$$

b) $V \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein affiner Teilraum, wenn

$$x^i \in V,\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,\ m \text{ beliebig},\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in V.$$

c) $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn

$$x^i \in K,\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,\ m \text{ beliebig},\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in K.$$

d) $C \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein *konvexer Kegel*, wenn

$$x^i \in C,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m,\ m \text{ beliebig} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in C.$$

2.1 Konvexe Mengen und Polyeder – Konvexe Mengen

(2.5) a) Ein konvexer Kegel $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *endlich erzeugt*, wenn eine endliche Teilmenge $S = \{u^1, \dots, u^m\} \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$C = \operatorname{cone}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u^i : \ \lambda_i \geq 0 \right\} = \{U\lambda : \ \lambda \geq 0\} \ .$$

Dabei ist $U = (u^1|\dots|u^m) \in \mathbb{R}^{n,m}$.

b) Eine Menge $E = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \gamma\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ heißt *(Hyper-)Ebene* im $\mathbb{R}^n$,

c) Eine Menge $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \gamma\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossener Halbraum*.

d) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *polyedral* (oder auch *Polyeder*), wenn sie als Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen darstellbar ist, d. h. wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

e) Beschränkte Polyeder $M \subset \mathbb{R}^n$ heißen *Polytope*.

2.2 Konvexe Mengen und Polyeder – Satz von Weyl / Farkas Lemma

(2.6) Jeder endlich erzeugte konvexe Kegel $C = \{U\lambda:\ \lambda \geq 0\}$ ist polyedral und von der Form $C = \{x \in \mathbb{R}^n:\ Ax \leq 0\}$.
Insbesondere sind endlich erzeugte konvexe Kegel abgeschlossen.

(2.7) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, abgeschlossene Menge, $K \neq \emptyset$. Dann existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ genau ein $x^* \in K$ mit $\|x - x^*\| \leq \|x - y\|$ für alle $y \in K$.
x^* ist eindeutig durch $(x - x^*)^T(x - y) \leq 0$ für alle $y \in K$ charakterisiert.

(2.8) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, abgeschlossene Menge, $K \neq \emptyset$, und $x \notin K$.
Dann existiert eine Hyperebene, die x und K trennt, d. h.
es existiert $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$a^T z \leq \gamma < a^T x \quad \text{für alle } z \in K\,.$$

Ist K sogar ein konvexer Kegel, so kann $\gamma = 0$ gewählt werden.

(2.9) Seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben.
Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n:\ Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$

(ii) $\{y \in \mathbb{R}^m:\ A^T y \leq 0,\ b^T y > 0\} \neq \emptyset$

2.3 Konvexe Mengen und Polyeder – Hauptsatz der Polyedertheorie

(2.10) $M \subset \mathbb{R}^n$ sei beliebige konvexe Menge.

a) $x \in M$ heißt *Ecke* / *Extremalpunkt* von M, wenn sich x nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte von M darstellen lässt, d. h., wenn gilt:

$$y, z \in M\,, \quad \lambda \in (0,1)\,, \quad x = \lambda y + (1-\lambda) z \quad \Rightarrow \quad y = z\,.$$

b) Ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, heißt *freie Richtung* von M, wenn es $x \in M$ gibt, so dass der ganze Strahl $\{x + tu : t \geq 0\}$ zu M gehört.

c) Eine freie Richtung $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, heißt *extremale Richtung* von M, wenn sie sich nicht als echte Konvexkombination zweier linear unabhängiger freier Richtungen schreiben lässt, d. h., wenn gilt:

$$v, w \text{ freie Richtungen}, \lambda \in (0,1)\,,\ u = \lambda v + (1-\lambda) w \quad \Rightarrow \quad v, w \text{ linear abhängig}\,.$$

Strahlen der Form $S = \{x + tu : t \geq 0\} \subset M$ mit Ecke $x \in M$ und extremaler Richtung u heißen *Extremalstrahlen*.
Mit $\mathrm{extrP}(M)$ bezeichnen wir die Menge aller Extremalpunkte von M.
Mit $\mathrm{extrS}(M)$ bezeichnen wir die Vereinigung aller Extremalstrahlen von M.

2.3 Konvexe Mengen und Polyeder – Hauptsatz der Polyedertheorie

(2.11) Ein Polyeder $M = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ hat nur endlich viele Ecken.

(2.12) Sei $I \subset \{1,...,m\}$, $I \neq \emptyset$. Dann heißt $M_I = \{x \in M \colon (Ax)_i = b_i \text{ für } i \in I\}$ eine *Seite* von M.

(2.13) Es gilt $\operatorname{extrP}(M_I) \subset \operatorname{extrP}(M)$ und $\operatorname{extrS}(M_I) \subset \operatorname{extrS}(M)$.

(2.15) Für den *relativen Rand*

$$\partial_{\mathrm{rel}} M = \{x \in \mathbb{R}^n \colon B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \text{ und } B_\varepsilon(x) \cap (\operatorname{affine} M \setminus M) \neq \emptyset \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$$

eines Polyeders gilt

$$\partial_{\mathrm{rel}} M \subset \bigcup \left\{ M_I \colon I \subset \{1,...,n\}, \dim M_I < \dim M \right\}.$$

(2.16) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $M \neq \emptyset$. Dann ist das *relative Innere*

$$\mathrm{int}_{\mathrm{rel}} M = \{x \in M \colon \text{ es exisitert ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{affine} M \subset M\}$$

nicht leer.

(2.18) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $M \neq \emptyset$ und M geradenfrei. Dann gilt $M \subset \operatorname{conv} \partial_{\mathrm{rel}} M$.

(2.19) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein geradenfreies Polyeder. Dann ist
$M = \operatorname{conv}\{\operatorname{extrP}(M) \cup \operatorname{extrS}(M)\}$.

(2.20) Jedes (nichtleere) Polytop M ist die konvexe Hülle seiner Ecken.

(2.21) Ein (nichtleerer) Polyeder M ist genau dann geradenfrei, wenn er Ecken besitzt.