3 Existenz- und Dualitätstheorie für Lineare Programme

(3.1) Seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Betrachte

$$(P) \qquad \text{Minimiere } c^T x \text{ auf } M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Wenn $\mu^* := \inf\{c^\top x : x \in M\} > -\infty$, dann gilt:
a) Wenn (P) zulässig ist (d.h. $M \neq \emptyset$), dann ist (P) auch lösbar.
b) Falls (P) lösbar ist, so existiert auch eine Ecke als Lösung.
Das duale Problem zu (P) lautet

$$(D) \qquad \text{Maximiere } b^T y \text{ auf } N := \{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \leq c\}.$$

(3.4) Sei $x \in M$ und $y \in N$. Dann gilt $b^T y \leq c^T x$.

(3.6) a) (P) und (D) zulässig $\Rightarrow$ (P) und (D) lösbar und $\min(P) = \max(D)$
b) (P) zulässig und (D) nicht zulässig $\Rightarrow$ $\inf(P) = -\infty$.
c) (D) zulässig und (P) nicht zulässig $\Rightarrow$ $\sup(D) = \infty$

(3.7) Primale Lösungen x^* und duale Lösungen y^* sind komplementär:
$x_k^* = 0$ oder $(A^T y^* - c)_k = 0$ für $k = 1, \ldots, n$.