4.1 Anwendungen in der Linearen Optimierung – Flussprobleme

(4.1) a) Eine Kapazitätsmatrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $c_{ij} \geq 0$ beschreibt einen Graphen mit Knoten $1, ..., n$ und Kanten $\{(i,j) \colon c_{ij} > 0\}$ mit den Eigenschaften

1) $c_{ij} c_{ji} = 0$, $c_{ii} = 0$
2) $c_{i1} = 0$, $c_{nj} = 0$
3) $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij} > 0$, $j = 2, ..., n$ und $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} > 0$, $i = 1, ..., n-1$

b) Ein Fluss $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ zu C ist eine Matrix mit $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$ und

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{jk} \quad \text{für alle } j = 2, \ldots, n-1\,.$$

c) $W(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{1j}$ heißt *Wert* des Flusses.

(4.1) Für einen Fluss gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{1j} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{kn}$

Netzwerksflussoptimierungsproblem

Maximiere $W(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{kn}$ unter $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{jk}, j = 2, ..., n-1$.

4.1 Anwendungen in der Linearen Optimierung – Flussprobleme

(4.3) Ein *Schnitt* (J^-,J^+) ist eine Zerlegung $J^+ \cup J^- = \{1,\dots,n\}$ mit $J^+ \cap J^- = \emptyset$, $1 \in J^-$, $n \in J^+$. Die *Kapazität* eines Schnittes ist $K(J^-,J^+) := \sum_{(i,j)\in J^-\times J^+} c_{ij}$.

(4.4) Für jeden Schnitt (J^-,J^+) und jeden Fluss X gilt

$$W(X) \;=\; \sum_{(i,j)\in J^-\times J^+} x_{ij} \;-\; \sum_{(i,j)\in J^-\times J^+} x_{ji} \;\le\; K(J^-,J^+)\,.$$

(4.5) Max-Flow-Min-Cut:
$\max\{W(X) : X \text{ Fluss}\} \;=\; \min\{K(J^-,J^+) : (J^-,J^+) \text{ Schnitt}\}$

(4.6) Ein *ungesättigter Pfad vom Knoten j zum Knoten k* ist ein Indexvektor $(p_1,\dots,p_m)$ mit $p_i \in \{1,\dots,n\}$, $i = 1,\dots,m$, $p_1 = j$, $p_m = k$, und für jedes $i = 1,\dots,m-1$ gilt:

a) $x_{p_ip_{i+1}} < c_{p_ip_{i+1}}$ falls $c_{p_ip_{i+1}} > 0$, b) $x_{p_{i+1}p_i} > 0$ falls $c_{p_ip_{i+1}} = 0$.

(4.7) Sei X ein maximaler Fluss, und setze

$$J^- \;:=\; \{1\} \,\cup\, \big\{k \in \{2,\dots,n\} : \text{es gibt einen ungesättigten Pfad von 1 nach } k\big\}\,.$$

Dann gilt: $n \notin J^-$, (J^-,J^+) mit $J^+ = \{1,...,n\} \setminus J^-$ ist ein Schnitt, und $W(X) = K(J^-,J^+)$.

4.1 Anwendungen in der Linearen Optimierung – Flussprobleme

Algorithmus von Ford-Fulkerson

S0) Wähle Fluss X (z. B. $X = 0$)

S1) $J^- = \{1\}$

S2) Wähle (j,k) mit $j \in J^-,\ k \notin J^-$
mit $x_{jk} < c_{jk}$ falls $c_{jk} > 0$ oder $x_{kj} > 0$ falls $c_{jk} = 0$
falls kein solches (j,k) existiert: STOP (X maximal)

S3) $J^- := J^- \cup \{k\}$ falls $n \notin J^-$ gehe zu S2)

S4) Erzeuge Pfad $(p_1,\dots,p_m)$ mit $p_1 = 1,\ p_m = n$, $p_i \in J^-$ und bestimme $d > 0$ mit

$$d = \min\left(\left\{c_{p_i p_{i+1}} - x_{p_i p_{i+1}} : c_{p_i p_{i+1}} > 0\right\} \cup \left\{x_{p_{i+1} p_i} : c_{p_i p_{i+1}} = 0\right\}\right)$$

S5) setze $x_{p_i p_{i+1}} := x_{p_i p_{i+1}} + d$ für $c_{p_i p_{i+1}} > 0$
$x_{p_{i+1} p_i} := x_{p_{i+1} p_i} - d$ für $c_{p_i p_{i+1}} = 0$
gehe zu S1)

4.2 Anwendungen in der Linearen Optimierung – Matrix-Spiele

(4.8) Ein Matrix-Spiel zweier Personen $P_{\mathscr{A}}$ und $P_{\mathscr{B}}$ wird durch $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ bestimmt, wobei a_{ij} ausgezahlt wird, falls $P_{\mathscr{A}}$ den Spielzug j und und $P_{\mathscr{B}}$ den Spielzug i ausführt.
Seien $M_{\mathscr{A}} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ e^T x = 1,\ x \geq 0\}$ und $M_{\mathscr{B}} = \{y \in \mathbb{R}^m\colon\ e^T y = 1,\ y \geq 0\}$ zulässige Strategien. Dann ist $\Phi(x,y) = y^T Ax$ die erwartete mittlere Auszahlung.

(4.9) Es gilt $\max_{y \in M_{\mathscr{B}}} \Phi(x,y) = \max_{i=1,\dots,m} (Ax)_i$ für festes $x \in \mathbb{R}^m$.
Es gilt $\min_{x \in M_{\mathscr{A}}} \Phi(x,y) = \min_{j=1,\dots,n} (A^T y)_j$ für festes $y \in \mathbb{R}^m$.

(4.10) Es gibt optimale Strategien $x^* \in M_{\mathscr{A}}$ und $y^* \in M_{\mathscr{B}}$ mit
$\Phi(x^*,y) \leq \Phi(x^*,y^*) \leq \Phi(x,y^*)$ für alle $x \in M_{\mathscr{A}}$ und $y \in M_{\mathscr{B}}$.
Es gilt $\Phi(x^*,y^*) = \min_{x \in M_{\mathscr{A}}} \max_{y \in M_{\mathscr{B}}} \Phi(x,y) = \max_{y \in M_{\mathscr{B}}} \min_{x \in M_{\mathscr{A}}} \Phi(x,y)$.
Falls der Wert des Spiels $\Phi(x^*,y^*) = 0$ ist, heißt das Spiel *fair*.

(4.11) Falls $A = -A^T$ schiefsymmetrisch, so ist der Wert der Spiels $\Phi(x^*,y^*) = 0$.

(4.12) Falls $\min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij}$, so heißt das Spiel *Sattelpunkt-Spiel*.

(4.13) Sattelpunkt-Spiele besitzen eine optimale reine Strategie $x^* = e^s$ und $y^* = e^r$ mit $a_{rs} = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}$.