5 Das Simplex-Verfahren

Seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Betrachte

$$(P) \qquad \text{Minimiere } c^T x \text{ auf } M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}\,.$$

(5.1) Zu $J \subset \{1,...,n\}$ definiere $A_J = (a_{*j})_{j \in J}$. Sei A_J invertierbar. Dann heißt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_J = A_J^{-1} b$ und $x_k = 0$ für $k \notin J$ ein *Basislösung*, und wenn $x \in M$ ist, heißt x *zulässige Basislösung*. Sie heißt *nicht entartet*, wenn $x_J > 0$ ist.

(5.2) Sei (P) zulässig und beschränkt. Dann ist (P) lösbar, und es existiert eine zulässige Basislösung als Lösung von (P).
Jede zulässige Basislösung $z \in M$ ist Ecke des Polyeders M.

Sei $\underline{j} = (j_1,...,j_m)$ ein Pivotvektor, d. h. $j_k \in \{1,...,n\}$ und $j_i \neq j_k$ für $i \neq k$.

(5.3) Sei $\operatorname{rang} A = m$. Dann existiert eine Darstellung
$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{A}x = \hat{b}\}$ mit $\hat{A}(\underline{j}) = I_m$.

Gauß-Jordan-Verfahren: für $k = 1,...,m$

S1) wähle $j = j_k \in \{j_1,...,j_{k-1}\}$ mit $a_{kj} \neq 0$

S2) für $i \neq k$ eliminiere Spalte j durch $a_{il} := a_{il} - (a_{ij}/a_{kj})a_{kl}$ für $l = 1,...,n$
für $i \neq k$ setze $b_i := b_i - (a_{ij}/a_{kj})b_k$;
normiere die Zeile k durch $a_{kl} := a_{kl}/a_{kj}$ für $l = 1,...,n$ und $b_k := b_k/a_{kj}$

5 Das Simplex-Verfahren

Phase I

Konstruiere einen Pivotvektor $\hat{\underline{j}}$ zu $Ax = b$ mit Basislösung $\hat{z}$, einen Vektor $\hat{c} \in \mathbb{R}^n$ und eine Darstellung $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{A}x = \hat{b},\ x \geq 0\}$ von M mit

i) Ist $\hat{\underline{j}} = (j_1, \dots, j_m)$, so ist $\hat{a}_{*j_k} = e^k$ für $k = 1, \dots, m$,

ii) $\hat{c}_{j_k} = 0$ für alle $k = 1, \dots, m$ (also auch $\hat{c}^T \hat{z} = 0$), und $\hat{b} \geq 0$,

iii) $f(x) = \hat{c}^T x + f(\hat{z})$ für alle x mit $Ax = b$. Setze $\hat{\gamma} = f(\hat{z})$.

Phase II

S1) Falls $\hat{c} \geq 0$ STOP ($\hat{z}$ optimal)

S2) Wähle $s \notin J(\hat{\underline{j}})$ mit $\hat{c}_s < 0$.

S3) Falls $\hat{a}_{*s} \leq 0$ STOP ($\inf(P) = -\infty$)

S4) Wähle r mit $\hat{a}_{rs} > 0$ und $\hat{b}_r / \hat{a}_{rs} \leq \hat{b}_i / \hat{a}_{is}$ für $i \in \{1, ..., m\}$ mit $\hat{a}_{is} > 0$.

S5) Definiere $\tilde{\underline{j}}$ mit $\tilde{j}_k = \hat{j}_k$ für $k \neq r$ und $\tilde{j}_r = s$

S6) Gauß-Jordan-Schritt: für $l = 1, ..., n$, $i \neq r$, $k = 1, ..., m$ setze $\tilde{a}_{rl} = \hat{a}_{rl} / \hat{a}_{rs}$, $\tilde{b}_r = \hat{b}_r / \hat{a}_{rs}$, $\tilde{a}_{il} = \hat{a}_{il} - \hat{a}_{is} \tilde{a}_{rl}$, $\tilde{b}_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{is} \tilde{b}_r$, $\tilde{c}_l = \hat{c}_l - \hat{c}_s \tilde{a}_{rl}$, $-\tilde{\gamma} = -\hat{\gamma} - \hat{c}_s \tilde{b}_r$, $\tilde{z}_{\tilde{j}_k} = \tilde{b}_k$ und $\tilde{z}_l = 0$ für $l \notin J(\tilde{\underline{j}})$

S7) $\hat{A} = \tilde{A}$, $\hat{b} = \tilde{b}$, $\hat{c} = \tilde{c}$, $\hat{z} = \tilde{z}$, $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$, gehe zu S1)

5 Das Simplex-Verfahren

(5.4) a) Für jedes x gilt: $\tilde{A}x = \tilde{b} \Longleftrightarrow \hat{A}x = \hat{b} \Longleftrightarrow Ax = b$.

b) $\hat{c}^T x + \hat{\gamma} = \tilde{c}^T x + \tilde{\gamma}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

c) $(\tilde{z}, \tilde{\underline{j}})$ ist zulässige Basislösung zu $\tilde{A}x = \tilde{b}$, für die 1), 2), 3) erfüllt sind.
Es ist $\tilde{a}_{rs} = 1$ und $\tilde{\gamma} = c^T \tilde{z} = f(\tilde{z})$. Insbesondere ist (P) äquivalent zu

$$(\hat{P}) \qquad \text{Minimiere} \quad \hat{c}^T x + \hat{\gamma} \quad \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{A}x = \hat{b},\ x \geq 0\},$$

und dies äquivalent zu

$$(\tilde{P}) \qquad \text{Minimiere} \quad \tilde{c}^T x + \tilde{\gamma} \quad \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{A}x = \tilde{b},\ x \geq 0\}.$$

d) $f(\tilde{z}) = c^T \tilde{z} = \tilde{\gamma} = \hat{c}_j \hat{b}_i / \hat{a}_{ij} + \hat{\gamma} \leq \hat{\gamma} = c^T \hat{z} = f(\hat{z})$.
e) Ist $\hat{c} \geq 0$, so ist $c^T x \geq c^T \hat{z}$ für alle $x \in M$, d.h. $\hat{z}$ ist optimal.

f) Ist $\hat{c}_s < 0$ und $\hat{a}_{*s} \leq 0$, so ist $\hat{c}^T x$ auf M nicht beschränkt, d.h. $\inf(P) = -\infty$.

5 Das Simplex-Verfahren

Pivot-Regel von Bland

i) Pivot-Spalte ist die Spalte $s = \min\{l : \hat{c}_l < 0\}$.

Sei $q_s = \min\{\hat{b}_i/\hat{a}_{is} : \hat{a}_{is} > 0\}$.

ii) Pivot-Zeile ist die Zeile r mit $j_r = \min\{j_i : \hat{a}_{is} > 0 \text{ und } \hat{b}_i/\hat{a}_{is} = q_s\}$.

(5.5) Das Simplex-Verfahren mit der Pivot-Regel von Bland wiederholt kein Tableau.

Phase I Sei $e = (1,1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^m$, und sei o.E. $b \geq 0$.

$$(P_I) \qquad \text{Minimiere } e^T(b - Ax) \quad \text{unter} \quad Ax \leq b,\ x \geq 0\,,$$

(5.6) (P_I) ist zulässig, und (P) ist genau dann zulässig, wenn $\min(P_I) = 0$.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
-\sum\limits_{i=1}^m a_{i1} & -\sum\limits_{i=1}^m a_{i2} & \cdots & -\sum\limits_{i=1}^m a_{in} & 0 & \cdots & 0 & & -\sum\limits_{i=1}^m b_i \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 & & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 1 & & b_m
\end{array}$$

5 Das revidierte Simplex-Verfahren

(5.7) Sei $\hat z$ Basislösung zum Pivot-Vektor $\underline{j}$, und sei $\underline{k} = (k_1, \dots, k_{n-m})$ ein Komplement von $\underline{j}$, d. h. $\{j_1, \dots, j_m\} \cup \{k_1, \dots, k_{n-m}\} = \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

a) $A(\underline{j}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist regulär, $\hat z(\underline{j}) = A(\underline{j})^{-1} b$, $\hat z(\underline{k}) = 0$, $\hat A = A(\underline{j})^{-1} A$.

b) $\hat c(\underline{k}) \;=\; c(\underline{k}) - \big(A(\underline{j})^{-1} A(\underline{k})\big)^T c(\underline{j})$.

Phase II

S0) Starte mit $\hat z(\underline{\hat j}) = A(\underline{\hat j})^{-1} b$, $\hat\gamma = c(\underline{\hat j})^T A(\underline{\hat j})^{-1} b$. Speichere $A(\underline{\hat j})^{-1} \in \mathbb{R}^{m,m}$.

S1) Setze $y := A(\underline{\hat j})^{-T} c(\underline{\hat j})$, $d = A(\hat k)^T y$. Falls $d \le c(\hat k)$ STOP ($\hat z$ optimal)

S2) Bestimme Index $k_s \in \{k_1, \dots, k_{n-m}\}$ mit $d_s > c_{k_s}$.

S3) Berechne $w = A(\underline{\hat j})^{-1} a_{*k_s}$. Falls $w \le 0$ STOP ($\inf(P) = -\infty$)

S4) Bestimme $r \in \{1, \dots, m\}$ mit $\hat z_{j_r}/w_r = \min\big\{\hat z_{j_r}/w_l : w_l > 0\big\}$.

S5) Setze $\underline{\tilde j} = (j_1, \dots, j_{r-1}, s, j_{r+1}, \dots, j_m)$, bestimme Komplement $\underline{\tilde k}$ von $\underline{\tilde j}$, setze

$$A(\underline{\tilde j})^{-1} = \left(I - \frac{(w - e^r)(e^r)^T}{w_r} \right) A(\underline{\hat j})^{-1}\,,\ \tilde z(\underline{\tilde j}) = A(\underline{\tilde j})^{-1} b\,,\ \tilde\gamma = \hat\gamma + \frac{\hat z_{j_r}}{w_r}\left(c_{k_s} - d_s\right)$$

S6) Update $\underline{\hat j} = \underline{\tilde j}$ gehe zu S1).