# 6.1 Konvexe Optimierung – Konvexe Funktionen

**(6.1)** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

a) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in D$, $t \in [0,1]$ gilt

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \;\le\; t\,f(x) + (1-t)f(y)\,.$$

b) $f$ heißt *strikt konvex*, wenn für alle $x, y \in D$, $x \neq y$ und alle $t \in (0,1)$ gilt:

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \;<\; t\,f(x) + (1-t)f(y)\,.$$

c) $f$ heißt *gleichmäßig konvex*, wenn es $c_0 > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$, $t \in [0,1]$ gilt

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \;+\; c_0 t(1-t)\,\|x-y\|^2 \;\le\; t\,f(x) + (1-t)f(y)\,.$$

**(6.2)** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
Dann gilt: $f$ ist gleichmäßig konvex auf $D$

$\iff$ (1) es ex. $c_0 > 0$ mit $f(x) - f(y) \;\ge\; Df(y)(x-y) + c_0\,\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in D$

$\iff$ (2) es ex. $c_0 > 0$ mit $\big(Df(x) - Df(y)\big)(x-y) \;\ge\; 2c_0\,\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in D$

$\iff$ (3) es ex. $c_0 > 0$ mit $z^T D^2 f(x)\, z \;\ge\; 2c_0\,\|z\|^2 \quad \forall x \in D,\ z \in \mathbb{R}^n$

# 6.2 Konvexe Optimierung – Existenz und Eindeutigkeit

Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_i : K \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex ($i = 1, \dots, p$), $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachte

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad M := \big\{x \in \mathbb{R}^n : x \in K,\ g(x) \le 0,\ Ax = b\big\}.$$

**(6.3)** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f : M \to \mathbb{R}$ konvex und $x^*$ ein lokales Minimum von $f$ auf $M$, d.h. es existiert $\varepsilon > 0$ mit $f(x^*) \le f(x)$ für alle $x \in M$ mit $\|x - x^*\| \le \varepsilon$. Dann ist $x^*$ sogar globales Minimum, d.h. $f(x^*) \le f(x)$ für alle $x \in M$.

**(6.4)** Es sei $M \neq \emptyset$, $\inf(P) > -\infty$ und

$$\Lambda := \big\{(f(x) + r, g(x) + z, Ax - b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m : r \ge 0,\ z \ge 0,\ x \in K\big\}$$

sei abgeschlossen. Dann besitzt $(P)$ eine Lösung.

**(6.5)** Ist $M \neq \emptyset$ und $f$ strikt konvex, so besitzt $(P)$ höchstens eine Lösung.

**(6.6)** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist $f$ stetig.

**(6.7)** Sei $M \neq \emptyset$, $M$ abgeschlossen, und sei $f$ gleichmäßig konvex. Dann ist $(P)$ eindeutig lösbar.

# 6.3 Konvexe Optimierung – Das duale Problem

Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_k : K \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex ($k = 1, \dots, p$),
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in K,\ g(x) \le 0,\ Ax = b\}\,.$$

Definiere
$\Lambda := \{(f(x)+r, g(x)+z, Ax-b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^m : r \ge 0,\ z \ge 0_p,\ x \in K\}$ .

$$(\tilde{P}) \qquad \text{Minimiere} \quad \phi(\beta,u,v) := \beta \quad \text{unter} \quad (\beta,u,v) \in \Lambda \cap \left(\mathbb{R}\times\{0_p\}\times\{0_m\}\right).$$

Definiere den Halbraum
$H(\gamma,u,v) := \{(t,w,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^m : t + u^T w + v^T z \ge \gamma\}$.

$$(\tilde{D}) \qquad \text{Maximiere} \quad \psi(\gamma,u,v) := \gamma \quad \text{unter} \quad \Lambda \subset H(\gamma,u,v)\,.$$

Setze $F(u,v) = \inf_{x\in K} \left(f(x) + u^T g(x) + v^T (Ax-b)\right)$ .

$$(D) \quad \text{Maximiere } F(u,v) \text{ auf } N = \{(u,v) \in \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^m : u \ge 0,\ F(u,v) > -\infty\}\,.$$

# 6.4 Konvexe Optimierung – Dualitätssätze

**(6.12)** Für alle $x \in M$ und $(u,v) \in N$ gilt $f(x) \ \geq \ F(u,v)$ .
Ist $f(x^*) = F(u^*,v^*)$ für $x^* \in M$, $(u^*,v^*) \in N$, so sind $x^*$ und $(u^*,v^*)$ optimal.

**(6.13)** Es sei $K = \mathbb{R}^n$, $f,g$ seien stetig, und es gelte die *Slaterbedingung* (SB):

(SB1) $\operatorname{rang} A = m \leq n$,

(SB2) es gibt $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\hat{x} = b$ und $g_k(\hat{x}) < 0$ für $k = 1,\ldots,p$.

Das Problem $(P)$ sei lösbar durch $x^* \in M$. Dann gibt es auch eine Lösung $(u^*,v^*) \in N$ von $(D)$ mit $f(x^*) = F(u^*,v^*)$ und $u_k^* g_k(x^*) = 0$ für $k = 1,\ldots,p$.

**(6.14)** *Lagrangefunktion* $L(x,u,v) \ := \ f(x) \ + \ u^T g(x) \ + \ v^T(Ax-b)$

**(6.15)** a) Sei $x^* \in M$ optimal für $(P)$ und die Slaterbedingung (SB) sei erfüllt.
Dann existieren $u^* \in \mathbb{R}^p$, $v^* \in \mathbb{R}^n$ mit ${u^*}^T g(x^*) = 0$ und

$$L(x^*,u,v) \ \leq \ L(x^*,u^*,v^*) \ \leq \ L(x,u^*,v^*) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^p_{\geq 0},\ v \in \mathbb{R}^m.$$

b) Falls $(x^*,u^*,v^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m$ ein Sattelpunkt von $L$ ist,
so ist $x^*$ Lösung von $(P)$ und $(u^*,v^*)$ Lösung von $(D)$.

**(6.17)** Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1,\ldots,p$, konvex und differenzierbar, und die Slaterbedingung (SB) sei erfüllt. Dann gilt: $x^* \in M$ ist genau dann eine Lösung von $(P)$, wenn es $u^* \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}$ und $v^* \in \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$Df(x^*) \ + \ {u^*}^T Dg(x^*) \ + \ {v^*}^T A = \ 0 \quad \text{und} \quad u_k^* g_k(x^*) \ = \ 0 \quad k = 1,\ldots,p.$$