7.1 Differenzierbare Optimierung – Lagrangesche Multiplikatoren

(7.2) Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $h(\hat{x}) = 0$. Die Funktionalmatrix $Dh(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ habe den Rang m (also insbesondere $m \le n$). Sei ferner $z \in \mathbb{R}^n$ mit $Dh(\hat{x})z = 0$.
Dann existiert $\delta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $r : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^n$ mit $r(0) = 0$ und $r'(0) = 0$ und $h\big(\hat{x} + tz + r(t)\big) = 0$ für alle $t \in (-\delta,\delta)$.

(7.4) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $h : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, und sei x^* ein (lokales) Minimum von f auf der Menge

$$M \;=\; \big\{x \in D : g(x) \le 0\,,\ h(x) = 0\big\}\,.$$

Es gelte die *constraint qualification*

$$(CQ1) \qquad \begin{array}{ll} (i) & \text{Rang}\, Dh(x^*) \;=\; m \;\le\; n\,, \\ (ii) & \text{es gibt } \hat{z} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } g(x^*) \;+\; Dg(x^*)\hat{z} \;<\; 0 \text{ und } Dh(x^*)\hat{z} \;=\; 0\,. \end{array}$$

Dann existiert $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^p \times \in \mathbb{R}^m$, so dass (x^*, u^*, v^*) in KKT-Punkt ist, d. h.

a) $\qquad \nabla_x L(x^*, u^*, v^*) = \nabla f(x^*) \;+ Dg(x^*)u^* \;+\; Dh(x^*)v^* \;=\; 0\,,$

b) $\qquad g(x^*) \le 0, \quad u^* \ge 0, \quad g(x^*)^T u^* = 0\,,$

c) $\qquad h(x^*) = 0\,.$

7.2 Differenzierbare Optimierung – Bedingungen zweiter Ordnung

(7.6) Sei $x^* \in M$ optimal, und sei $I(x^*) = \big\{i \in \{1,\dots,p\} : g_i(x^*) = 0\big\}$ die Menge der aktiven Indizes mit $q = |I|$. Dann folgt $(CQ1)$ aus

$$(CQ2) \qquad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} Dg_I(x^*) \\ Dh(x^*) \end{pmatrix} = q + m\,.$$

(7.7) Notwendige Optimalitätsbedingung 2. Ordnung: Sei x^* lokales Minimum von f auf M, und sei $(CQ2)$ erfüllt. Es seien zusätzlich f, g und h zweimal stetig differenzierbar in x^*. Dann existiert $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^p \times \in \mathbb{R}^m$, so dass (x^*, u^*, v^*) in KKT-Punkt ist. Zusätzlich gilt auf dem Unterraum
$V = \big\{z \in \mathbb{R}^n : Dh(x^*)z = 0\,,\ Dg_i(x^*)z = 0 \text{ für alle } i \in I(x^*)\big\}$

$$z^\top D_x^2 L(x^*, u^*, v^*)\, z \ \geq\ 0 \quad \text{für alle } z \in V\,.$$

(7.8) Hinreichende Optimalitätsbedingung 2. Ordnung: (x^*, u^*, v^*) sei ein KKT-Punkt, und zu $I^+ = \big\{i \in I(x^*) : u_i^* > 0\big\}$ definiere den Kegel
$K = \big\{z \in \mathbb{R}^n : Dh(x^*)z = 0\,,\ Dg_i(x^*)z = 0 \text{ für } i \in I^+\,,\ Dg_i(x^*)z \leq 0 \text{ für } i \in I \setminus I^+\big\}$. Zusätzlich gelte

$$z^\top D_x^2 L(x^*, u^*, v^*) z \ >\ 0 \quad \text{für alle } z \in K\,,\ z \neq 0\,.$$

Dann ist x^* striktes lokales Minimum von f auf M.