8 Quadratische Optimierung

Seien $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachte

$$(P) \quad \text{Minimiere } \; f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \;\; Ax = b\}$$

(8.1) Sei (P) zulässig und $\inf(P) > -\infty$. Dann ist (P) lösbar.

(8.2) Betrachte das lineare Optimierungsproblem (mit $Q = 0$).
Dann existiert $y^* \in \mathbb{R}^m$ mit

i) $\quad c + A^T y^* \geq 0,$ $\qquad$ ii) $\quad (c + A^T y^*)^T x^* = 0$.

(8.3) a) Sei $x^* \in M$ Lösung von (P). Dann gibt es $y^* \in \mathbb{R}^m$ mit

i) $\quad Qx^* + c + A^T y^* \geq 0$ $\qquad$ ii) $\quad (Qx^* + c + A^T y^*)^T x^* = 0$.

b) Sei Q symmetrisch und positiv semidefinit, $x^* \in M$, und es gebe $y^* \in \mathbb{R}^m$ mit i), ii). Dann ist x^* Lösung von (P).

(8.4) Betrachte

$$(P_2) \quad \text{Minimiere } \; f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\}.$$

a) Sei $x^* \in M$ Lösung von (P_2). Dann gibt es $u^* \in \mathbb{R}^m$ mit $u^* \geq 0$ und

i) $\quad Qx^* + c + A^T u^* = 0$ $\qquad$ ii) $\quad (b - Ax^*)^T u^* = 0$.

b) Sei Q symmetrisch und positiv semidefinit, $x^* \in M$, und es gebe $u^* \in \mathbb{R}^m$ mit $u^* \geq 0$ und i), ii). Dann ist x^* Lösung von (P_2).