Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie – Scheinklausur

Sommersemester 2007 25. Juli 2007

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1 Punkte)

Kreuzen Sie an, welche der folgenden 5 Aussagen _wahr_ und welche _nicht wahr_ sind.

Beantworten Sie nur die Fragen, bei denen Sie sich sicher sind. Für jede falsche Antwort wird eine richtige Antwort nicht gewertet!

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Polyeder. M besitzt genau dann Ecken, wenn M geradenfrei ist.

wahr ⊗	*nicht wahr* ○

(b) Für jedes Matrix-Nullsummenspiel gibt es optimale Lösungen, die aus reinen Strategien bestehen.

wahr ○	*nicht wahr* ⊗

(c) Lineare Probleme der Form ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$)

Minimiere $c^T x$ unter $Ax \leq b$

können durch Einführung von Schlupfvariablen immer sofort auf ein Starttableau für Phase II des Simplex-Verfahrens gebracht werden.

wahr ○	*nicht wahr* ⊗

(d) Für das konvexe Optimierungsproblem ($f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $i = 1, ..., p$)

(P) Minimiere $f(x)$ auf $M := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., p\}$

gilt: Ist (x^*, u^*) Sattelpunkt der Lagrange-Funktion $L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^p u_i g_i(x)$, dann gilt $u_i^* g_i(x^*) > 0$ für $i = 1, ..., p$.

wahr ○	*nicht wahr* ⊗

(e) Seien $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar ($i = 1, ..., p$), $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und das Problem (P) sei gegeben durch

(P) Minimiere $f(x)$ auf $M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, Ax = b\}$.

Dann gilt: Falls es $x^* \in \mathbb{R}^n$, $u^* \in \mathbb{R}^p$ mit $u^* \geq 0$ und $v^* \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass (x^*, u^*, v^*) ein KKT-Punkt von (P) ist und x^* die constraint qualification $(CQ1)$ erfüllt, so ist x^* globale Lösung von (P).

wahr ⊗	*nicht wahr* ○

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

(a) Wie viele Seiten hat ein Würfel?

(b) Beweisen Sie das Lemma von Farkas: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(i) $Ax = b$, $x \geq 0$, ist lösbar durch ein $x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $A^T y \leq 0$, $b^T y > 0$, ist lösbar durch ein $y \in \mathbb{R}^m$.

Hinweis: Je nach Vorgehen können Sie den strikten Trennungssatz benutzen:
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, nicht leer, abgeschlossen, sowie $x \notin K$. Dann existiert eine Hyperebene $H = \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y = \gamma\}$ (mit $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}$), die x und K trennt, d.h.

$$a^T z \leq \gamma < a^T x \qquad \text{für alle } \ z \in K.$$

Ist K zusätzlich ein Kegel, so kann $\gamma = 0$ gewählt werden.

Lösung:

(a) Ein Würfel hat: 8 Ecken, 12 Kanten, 6 Flächen, also insgesamt 26 Seiten.

(b) Zwei Möglichkeiten: Einmal mit dem Trennungssatz, einmal mit dem starken Dualitätssatz:
Trennungssatz:
Beides kann nicht gelten, da sonst gelten würde:

$$0 < y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \leq 0 \qquad \text{Widerspruch}$$

Wir nehmen an, *(i)* gelte nicht. Dann gilt $b \notin K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$. Nach Satz von Weyl ist K konvexer polyedraler Kegel und damit abgeschlossen. Daher kann man b und K trennen, d.h. es gibt ein $y \in \mathbb{R}^m$, $y \neq 0$, mit

$$y^T Ax \leq 0 < y^T b.$$

Setzt man für x nacheinander die Einheitsvektoren $e^i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ ein so erhält man $A^T y \leq 0$, und damit die Behauptung.

Starker Dualitätssatz:
Setze $M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Das Lemma von Farkas kann dann äquivalent geschrieben werden als

$$M \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \ \text{ mit } \ A^T y \leq 0_n \ \text{ gilt } \ b^T y \leq 0.$$

$'' \Rightarrow''$: Sei $M \neq \emptyset$. Dann besitzt das primale Problem

$$(P) \qquad\qquad \text{Minimiere} \quad c^T x \quad \text{mit} \quad x \in M$$

für $c = 0_n$ ein Lösung $x^* \in M$, da $-\infty < 0 = \min(P)$. Nach dem starken Dualitätssatz folgt dann, dass das duale Problem

$$(D) \qquad\qquad \text{Maximiere} \quad b^T y \quad \text{mit} \quad y \in N := \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq c = 0_n\}$$

ein Lösung $y^* \in N$ hat ($N \neq \emptyset$ da $0_m \in N$). Weiter gilt $\min(P) = \max(D)$ nach dem starken Dualitätssatz und da y^* optimal für (D), folgt dann für alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^T y \leq 0_n$:

$$b^T y \leq b^T y^* = \max(D) = \min(P) = 0_n^T x^* = 0.$$

$'' \Leftarrow''$: Betrachte wieder das duale Problem (D). Da $0_m \in N$, ist (D) zulässig und für alle $y \in N$ gilt dann $b^T y \leq 0$. Daraus folgt dann $\sup(D) = 0 < +\infty$. Wir nehmen jetzt an, dass $M = \emptyset$. Nach dem starken Dualitätssatz folgt dann aber $\sup(D) = +\infty$, also ein Widerspruch und damit kann M nicht leer sein.

Aufgabe 3 (4+1 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$(P) \qquad \text{Minimiere } 18x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 6x_4 \quad \text{unter} \quad x \geq 0,$$
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 2. \end{array}$$

(a) Wenden Sie für (P) Phase I des Simplex-Verfahrens an, um eine zulässige Basislösung zu finden, und bestimmen Sie gegebenenfalls mit Phase II die Lösung des Problems.

(b) Gegen Sie das zu (P) duale Problem an.

Lösung:

(a)
```
n = 6
m = 2
T =

   -4   -4    2   -0    0    0   -4
    3    1   -2    1    1    0    2
    1    3    0   -1    0    1    2
   18   12    2    6    0    0    0

Reihe = 1
Spalte = 1
T =

    0.00000   -2.66667   -0.66667    1.33333    1.33333    0.00000   -1.33333
    1.00000    0.33333   -0.66667    0.33333    0.33333    0.00000    0.66667
    0.00000    2.66667    0.66667   -1.33333   -0.33333    1.00000    1.33333
    0.00000    6.00000   14.00000    0.00000   -6.00000    0.00000  -12.00000

Reihe = 2
Spalte = 2
T =

    0.00000    0.00000    0.00000   -0.00000    1.00000    1.00000    0.00000
    1.00000    0.00000   -0.75000    0.50000    0.37500   -0.12500    0.50000
    0.00000    1.00000    0.25000   -0.50000   -0.12500    0.37500    0.50000
    0.00000    0.00000   12.50000    3.00000   -5.25000   -2.25000  -15.00000

---------- Phase I fertig -- Start Phase II ----------------------
n = 4
m = 2
T =

    0.00000    0.00000   12.50000    3.00000  -15.00000
    1.00000    0.00000   -0.75000    0.50000    0.50000
    0.00000    1.00000    0.25000   -0.50000    0.50000
```

(b) Maximiere $2y_1 + 2y_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} 3y_1 & + & y_2 & \leq & 18, \\ y_1 & + & 3y_2 & \leq & 12, \\ -2y_1 & & & \leq & 2, \\ y_1 & - & y_2 & \leq & 6 \end{array}$$

Aufgabe 4 (2+1+2 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex und nicht leer, sowie $f : M \to \mathbb{R}$ konvex. Betrachten Sie

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad M.$$

(a) Sei x^* ein lokales Minimum von f auf M, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in M$ mit $\|x - x^*\|_2 \leq \varepsilon$. Zeigen Sie: x^* ist sogar globales Minimum, d.h. es gilt $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in M$.

(b) f sei nun zusätzlich strikt konvex und (P) sei lösbar, d.h. es gibt ein $x^* \in M$ mit $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie: Die Lösung ist eindeutig, d.h. $f(x^*) \; < \; f(x)$ für alle $x \in M$.

(c) Sei nun $M = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^3 - x_2 + 6$. Zeigen Sie: f ist konvex auf M, aber nicht strikt konvex.

Lösung:

(a) Sei $x \in M$ beliebig, und wähle $\lambda \in (0,1)$ so klein, dass $\lambda\|x - x^*\| \leq \varepsilon$. Dann ist

$$f(x^*) \leq f(x * + \lambda(x - x^*)) \overset{f\ konvex}{\leq} f(x*) + \lambda(f(x) - f(x*)),$$

und daraus folgt $f(x) \geq f(x^*)$. Da $x \in M$ beliebig war folgt die Behauptung.

(b) Gäbe es zwei optimale Lösungen $x_1^*, x_2^* \in M$ und $x_1^* \neq x_2^*$, so wäre $f(x_1^*) = f(x_2^*) = \inf(P)$. Daraus folgt

$$\inf(P) = \frac{1}{2}f(x_1^*) + \frac{1}{2}f(x_2^*) \overset{f\ strikt\ konvex}{>} f(\frac{1}{2}x_1^* + \frac{1}{2}x_2^*),$$

und $x := \frac{1}{2}x_1^* + \frac{1}{2}x_2^* \in M$. Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von x_1^* und x_2^*.

(c) f ist zweimal stetig differenzierbar und

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2^2 - 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{bmatrix}.$$

Auf $M = [0,1]^2$ ist hat $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ die Eigenwerte $\lambda_1(x) = 2$ und $\lambda_2(x) = 6x_2$. Diese sind größer gleich 0 und f ist damit konvex. Es gilt aber $\lambda_2(x_1, 0) = 0$, und somit ist f nicht strikt konvex auf M.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2\,, \qquad \text{und} \qquad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - 2 \\ x_1 + x_2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x_1, x_2) \quad \text{auf} \quad M := \{x \in K : g(x_1, x_2) \leq 0\}$$

mit der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Lösung: (P) ist konvexes Optimierungsproblem und die Slater-Bedingung ist erfüllt, z.B. durch $\hat{x} = (0, 0)$. Lagrange Funktion

$$L(x, u) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + u_1(x_2 - 2) + u_2(x_1 + x_2 - 3)$$

Optimalitätsbed. (KKT)

$$\nabla_x L(x^*, u^*) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad (u^*)^T g(x^*) = 0, \quad u^* \geq 0, \quad g(x^*) \leq 0$$

Also

$$\nabla_x L(x, u) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 6 + u_2 \\ 2x_2 - 4 + u_1 + u_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt

$$x_1 = 3 - \frac{1}{2}u_2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$$

Einsetzen in zweiten Teil der Optimalitätsbedingungen (Komplementaritätsbed.) liefert

$$u_1(-\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2) = 0 \quad \text{und} \quad u_2(2 - \frac{1}{2}u_1 - u_2) = 0.$$

Fallunterscheidungen:

- $u_1 = 0$. Daraus folgt $u_2 = 0$ oder $u_2 = 2$.
- $-u_2 = u_1$. Daraus folgt $u_1 = u_2 = 0$ oder $u_1 = -4$, $u_2 = 4$.
- $u_2 = 0$. Daraus folgt $u_1 = 0$.
- $u_1 + 2u_2 = 4$. Daraus folgt $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ oder $u_1 = -4$, $u_2 = 4$.

Es sind also 3 verschiedene Fälle möglich für Paare (u_1, u_2).

- $(u_1, u_2) = (0, 0)$. Daraus folgt $(x_1, x_2) = (3, 2)$. Widerspruch da nicht in der Menge.
- $(u_1, u_2) = (0, 2)$. Daraus folgt $(x_1, x_2) = (2, 1)$ mit $f(2, 1) = -11$.
- $(u_1, u_2) = (-4, 4)$. Daraus folgt $(x_1, x_2) = (1, 3)$. Widerspruch da nicht in der Menge.

Also haben wir das $(x^*, u^*) = (x_1^*, x_2^*, u_1^*, u_2^*) = (2, 1, 0, 2)$ die Optimalitätsbedingungen (KKT) erfüllt, und somit ist (x^*, u^*) ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion. Damit erreicht $f(x)$ bei $x = (2, 1)$ sein Minimum über der Menge M.