Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie – Scheinklausur

Sommersemester 2008 — 23. Juli 2008

Bitte in Druckschrift ausfüllen:

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihren Namen. Kreuzen Sie an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben:

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	Gesamt
bearbeitet						
Höchstpunktzahl	10	10	10	10	10	50
Punkte						

Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie die Sätze genau. Erklären und begründen Sie alle Rechenschritte, die Sie durchführen.

Zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte hinreichend.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen!

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)

Kreuzen Sie an, welche der folgenden 5 Aussagen *wahr* und welche *nicht wahr* sind.
Beantworten Sie nur die Fragen, bei denen Sie sich sicher sind. Für jede falsche Antwort wird eine richtige Antwort nicht gewertet!

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein geradenfreies Polyeder. Dann gilt: $M = \operatorname{conv}\{\operatorname{extrP}(M) \cup \operatorname{extrS}(M)\}$.

wahr $\otimes$	*nicht wahr* $\bigcirc$

(b) Lokale Minima konvexer Optimierungsaufgaben sind bereits globale Minima.

wahr $\otimes$	*nicht wahr* $\bigcirc$

(c) Lineare Probleme der Form ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$)

$$\text{Minimiere} \quad c^T x \quad \text{unter} \quad Ax \leq b$$

können durch Einführung von Schlupfvariablen immer sofort auf ein Starttableau für Phase II des Simplex-Verfahrens gebracht werden.

wahr $\bigcirc$	*nicht wahr* $\otimes$

(d) Das duale Problem der konvexen Optimierungsaufgabe (d.h. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ seien konvex, sowie $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$)

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, Ax = b\}$$

ist gegeben durch

$$\text{Maximiere} \quad u^T g(x) + v^T(Ax - b) \qquad \text{auf} \quad N := \{(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m : u \geq 0, v \geq 0\}\,.$$

wahr $\bigcirc$	*nicht wahr* $\otimes$

(e) Quadratische Optimierungsprobleme der Form (mit $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$)

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \qquad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

sind immer lösbar.

wahr $\bigcirc$	*nicht wahr* $\otimes$

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2 Punkte)
Formulieren Sie:

(a) Das Lemma von Farkas.

(b) Den starken Dualitätssatz der linearen Programmierung.

(c) Den Max-Flow-Min-Cut Satz der Netzwerkoptimierung.

(d) Die Slater-Bedingung der konvexen Optimierung.

(e) Die notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung für differenzierbare Optimierungsprobleme.

Lösung:

(a) Genau eine der beiden Aussagen ist richtig:

$$\begin{array}{ll} (i) & \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset \\ (ii) & \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq 0, b^T y > 0\} \neq \emptyset \end{array}$$

(b) Wir betrachten (P) und (D) in Standardform

- Falls (P) und (D) beide zulässig sind, gilt $\min(P) = \max(D)$
- Falls (P) zulässig und (D) nicht, gilt $\inf(P) = -\infty$
- Falls (D) zulässig und (P) nicht, gilt $\sup(D) = \infty$

(c) Aus dem starken Dualitätssatz folgt

$$\max\{W(X) : X \text{ Fluss}\} = \min\{K(J^-, J^+) : (J^-, J^+) \text{ Schnitt}\}$$

(d) Es gilt $\operatorname{rang}(A) = m \leq n$ und es gibt ein $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\widehat{x} = b$ und $g(\widehat{x}) < 0$.

(e) Sei x^* eine Lösung einer differenzierbaren Optimierungsaufgabe. Falls x^* die (CQ2) Bedingungung erfüllt, gibt es Multiplikatoren $\mathbb{R}^p \ni u^* \geq 0$ und $v^* \in \mathbb{R}^m$, so dass (x^*, u^*, v^*) ein KKT-Punkt ist und die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion $D_x^2 L(x^*, u^*, v^*)$ ist auf dem Unterraum

$$V = \{z \in \mathbb{R}^n : Dh(x^*)z = 0,\ Dg_i(x^*)z = 0\ \forall i \in I(x^*)\}$$

positiv semidefinit.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

(a) Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b, x \geq 0\}$ nicht leer ist und geben Sie in diesem Fall eine zulässige Basislösung an.

(b) Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem mit Phase II des Simplex-Verfahrens.

$$\text{Minimiere} \quad -3x_1 - x_2 - 3x_3 \quad \text{unter} \quad x \geq 0,$$
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2\,, \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & -5\,, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6\,. \end{array}$$

Lösung:

(a) Mit Phase I des Simplex-Verfahrens erhalten wir folgende Tableaus (nach Multiplizieren der zweiten Gleichung mit -1)

$$\begin{array}{ccc|cc|c}
-2 & -2 & -6 & 0 & 0 & -4 \\ \hline
\boxed{1} & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|c}
0 & 6 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -6 & \boxed{2} & -1 & 1 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline
1 & 10 & 0 & 2 & -1 & 2 \\
0 & -3 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0
\end{array}$$

Folglich ist $(2, 0, 0)$ eine zulässige Basislösung.

(b) Multiplizieren der zweiten Ungleichung mit -1 liefert ein lineares Programm der Form

$$\text{Minimiere} \quad c^T x \qquad \text{unter} \quad Ax \leq b, x \geq 0, b \geq 0\,.$$

Auf dieses kann nach Einführung von Schupfvariablen sofort Phase II angewendet werden und wir erhalten folgende Tableaus:

$$\begin{array}{cccccc|c}
-3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1/2 & -3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 3 \\ \hline
1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 3/2 & \boxed{5/2} & -1/2 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 7/5 & 0 & 6/5 & 3/5 & 0 & 27/5 \\ \hline
1 & 1/5 & 0 & 3/5 & -1/5 & 0 & 1/5 \\
0 & 3/5 & 1 & -1/5 & 2/5 & 0 & 8/5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4
\end{array}$$

Wir erhalten also $z = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$ als Lösung des erweiterten Problems (mit Schlupfvariablen) und somit $x^* = (1/5, 0, 8/5)$ als Lösung des ursprünglichen Problems mit optimalem Zielfunktionswert $-27/5$.

Aufgabe 4 (4+6 Punkte)

Betrachten Sie zu einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und der konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{unter} \quad x \in K\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $\{x \in K : f(x) \leq f(y) \text{ für alle } y \in K\}$ von (P) konvex ist.

(b) Sei f nun zusätzlich differenzierbar. Dann ist $x^* \in K$ genau dann Lösung von (P), falls gilt:

$$Df(x^*)(x - x^*) \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in K\,.$$

Lösung:

(a) Sei K^* die Lösungsmenge und $x^1, x^2 \in K^*$ seien zwei Lösungen, d.h. $f^* = f(x^1) = f(x^2) \leq f(y)$ für alle $y \in K$. Zu $t \in [0,1]$ sei $x_t = (1-t)x^1 + tx^2$. Zu zeigen ist $x_t \in K^*$, also $f(x_t) \leq f(y)$ für alle $y \in K$.

$$\begin{aligned} f(x_t) &= f\big((1-t)x^1 + tx^2\big) \leq (1-t)f(x^1) + tf(x^2) \\ &= (1-t)f^* + tf^* = f^* \leq f(y) \quad \forall y \in K \end{aligned}$$

und somit ist x_t auch optimal; folglich also K^* konvex.

(b) "$\Rightarrow$: Es gilt $f(x^*) \leq f(y)\ \forall y \in K$. Sei $x \in K$ beliebig. Dann ist auch wieder $x_t = (1-t)x^* + tx = x^* + t(x - x^*)$ in K und somit folgt aus der Optimalität von x^*: $f(x^*) \leq f(x_t)$, also auch

$$f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*) \geq 0\,.$$

Wir teilen durch $t > 0$ und betrachten den Grenzwert $t \to 0$. Dies ist gerade die Richtungsableitung nach $(x - x^*)$ in x^*, d.h.

$$Df(x^*)(x - x^*) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\big(f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*)\big) \geq 0\,.$$

woraus die Behauptung folgt.

"$\Leftarrow$: Aufgrund der Konvexität von f und der Voraussetzung $Df(x^*)(x - x^*) \geq 0$ gilt für alle $y \in K$:

$$f(y) \geq f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) \geq f(x^*)\,,$$

und somit ist x^* Minimum.

Aufgabe 5 (4+6 Punkte)

Gegeben seien stetig differenzierbare Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, e^T x = 1\}\,,$$

wobei $e = (1, ..., 1)^T$. Zeigen Sie:

(a) Für alle Punkte in $x \in M$ gilt die (CQ2) und somit auch die (CQ1) Bedingung.

(b) Falls das Optimierungsproblem (P) sein Minimum in einem x^* annimmt, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für $i = 1, ..., n$ gilt:

$$f_i'(x_i^*) \geq \alpha, \quad \text{und} \quad \big(f_i'(x_i^*) - \alpha\big)x_i^* = 0.$$

Lösung:

(a) Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = -x$ und $h(x) = e^T x$. Wir nehmen an, dass (P) in x^* sein Minimum annimmt. Da $x^* \geq 0$ und $e^T x^* = 1$ gibt es mindestens ein i, so dass $x_i^* > 0$. Daraus folgt, dass $(CQ2)$ und damit auch $(CQ1)$ gilt, denn: Da $\nabla g_i(x) = -e^i$, wobei e^i der i-te Einheitsvektor ist, und mit $I(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ die Vektoren

$$\{\nabla g_i(x^*) : i \in I(x^*)\} \cup \{\nabla h(x^*)\} = \{e^i : i \in I(x^*)\} \cup \{e\}$$

linear unabhängig sind, gilt $(CQ2)$.

(b) Dann gibt es wegen $(CQ1)$ $u^* \in \mathbb{R}^n$, $u^* \geq 0$ und $v \in \mathbb{R}$, so dass (x^*, u^*, v^*) ein KKT-Punkt ist, und es gilt

$$\begin{aligned} f_i'(x_i^*) - u_i^* + v = 0 \qquad \forall i = 1, ..., n \\ e^T x^* = 1, \quad u^* \geq 0, \quad x^* \geq 0, \quad (u^*)^T x^* = 0. \end{aligned}$$

Umschreiben der ersten Bedingung liefert

$$0 \leq u_i^* = f_i(x_i^*) + v \qquad \forall i = 1, ..., n$$

und mit $\alpha := -v$ folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt aus den Komplementaritätsbedingung: $(u^*)^T x^* = 0$ liefert mit obigem und $\alpha = -v$

$$\big(f_i(x_i^*) - \alpha\big)x_i^* = 0 \qquad \forall i = 1, ..., n.$$