Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

10. Übungsblatt vom 22. Juni 2012

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass folgende Funktionen konvex sind:

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\ f_1(x) = \|x\|$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist,

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\ f_2(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}\,,$

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,,\ f_3(x) = \dfrac{x_1^2}{x_2}\,.$

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f \colon D \to \mathbb{R}$ konvex und $m \in \mathbb{N}$. Für $i = 1, ..., m$ seien $x^{(i)} \in D$ und $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

(a) Beweisen Sie die Jensensche Ungleichung:

$$f\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^{(i)}\Big) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x^{(i)})\,.$$

(b) Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \geq 0$. Zeigen Sie die Youngsche Ungleichung:

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Konvexität der Exponentialfunktion.

Aufgabe 33: (3 Punkte)
Die Funktion $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei konvex. Zeigen Sie:

(a) Ist die Funktionen $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend, dann ist die Funktion $f = h \circ g$ konvex.

(b) Für $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $d \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(y) = g(Cy + d)$ konvex.

Aufgabe 34: (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass jede konvexe Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 29. Juni 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.