Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

11. Übungsblatt vom 29. Juni 2012

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Formulieren Sie zu dem konvexen Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \qquad \text{Minimiere } x_1^2 + x_2 \quad \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \le 1\}$$

das duale Problem und lösen Sie beide.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \qquad \text{Minimiere } \mathrm{e}^{-x_1} \quad \text{unter} \quad \frac{x_1^2}{x_2} \le 0,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 > 0 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (P) ein konvexes Optimierungsproblem ist und lösen Sie es.

(b) Bestimmen Sie das duale Problem (D) von (P) und berechnen Sie die Lösung von (D).

(c) Tritt eine Dualitätslücke auf, d.h. ist $\max(\text{D}) < \min(\text{P})$?

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Betrachten Sie zu einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sowie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ die beiden quadratischen Optimierungsaufgaben

$$\text{(P1)} \qquad \text{Minimiere } \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \quad \text{über} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\},$$

$$\text{(P2)} \qquad \text{Minimiere } \frac{1}{2}y^T A Q^{-1} A^T y + (b + AQ^{-1}c)^T y \quad \text{über} \quad N = \{y \in \mathbb{R}^m : y \ge 0\}.$$

Zeigen Sie:

(a) (P1) ist eindeutig durch ein $x^* \in M$ lösbar, falls M nichtleer ist.

(b) Das quadratische Problem (P2) ist äquivalent zum dualen Problem von (P1). Stellen Sie dazu das duale Problem von (P1) auf.

Aufgabe 38: (2 Punkte)
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f \colon K \to \mathbb{R}$, $g \colon K \to \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Mit $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Lagrange-Funktion

$$L(x, u, v) = f(x) + u^T g(x) + v^T (Ax - b).$$

und ferner sei $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(u, v) = \inf_{x\in K} L(x, u, v)$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $F(u, v)$ konkav ist (d.h. $-F(u, v)$ ist konvex).

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 06. Juli 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie" gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.