Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

13. Übungsblatt vom 13. Juli 2012

Aufgabe 43: (4 Bonus - Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x_1^2 x_2$ gegeben. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 - 4 = 0\}\,.$$

(a) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte von (P).

(b) Zeigen Sie mithilfe der notwendigen Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung, dass $x^* = (0,-2)^\top$ kein lokales Minimum von f auf M ist.

(c) Zeigen Sie mithilfe der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung, dass $x^* = (0,2)^\top$ ein lokales Minimum von f auf M ist.

Aufgabe 44: (4 Bonus - Punkte)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \quad \text{Minimiere} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 + x_3 \quad \text{unter} \quad x_1^2 + x_2 + x_3 \geq 0,\ x_1^2 - x_2 + x_3 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Sei $x^* = (0,0,0)^\top$.

(a) Gibt es zu x^* Lagrange-Multiplikatoren $u^* \in \mathbb{R}^3$, so dass (x^*, u^*) KKT-Punkt von (P) ist?

(b) Welche der Bedingungen (CQ1), (CQ2) und (ACQ) ist in x^* erfüllt?

(c) Ist x^* ein lokales Minimum von f auf M?

Aufgabe 45: (4 Bonus - Punkte)
An einem heißen Sommertag bestellt sich Fritzchen Müller ein kühles Bier. Nachdem es serviert wurde, betrachtet er aufmerksam den Zerfall des Bierschaumes. Deshalb notiert er sich zu den Zeitpunkten $0 < t_1 < ... < t_m \leq T$ die Höhe des Bierschaumes $y_1, ..., y_m$. Fritzchen vermutet, dass der Zerfall des Bierschaums proportional zur Schaumhöhe ist, d.h. sich die Schaumhöhe $y(t)$ näherungsweise durch die Lösung der linearen Differentialgleichung $y'(t) = ay(t)$ mit Anfangswert $y(0) = b$ beschreiben lässt, wobei $t \in [0,T]$, $a \leq 0$ die Zerfallsrate und $b \geq 0$ die Schaumhöhe zum Zeitpunkt des Zapfens sein soll. Um die Parameter a, b aus seinen Messungen zu bestimmen, versucht Fritzchen die Summe der Fehlerquadrate zu minimieren und betrachtet die Optimierungsaufgabe

$$\text{(P)} \quad \text{Minimiere} \quad \sum_{i=1}^{m} \big(y(t_i) - y_i\big)^2 \quad \text{unter} \quad y'(t) = ay(t),\ a \leq 0,\ y(0) = b \geq 0\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = ay(t)$, $y(0) = b$.

(b) Nutzen Sie die gefundene Lösung und zeigen Sie, dass (P) sich damit als nichtlineares Ausgleichsproblem der Form

$$\text{(AP)} \quad \text{Minimiere} \quad f(a,b) = |\Phi(a,b) - y|^2 \quad \text{unter} \quad a \leq 0,\ b \geq 0$$

mit einer Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ und $y = (y_1, ..., y_m)^\top$ schreiben lässt.

(c) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (AP) und zeigen Sie, dass für eine Lösung (a^*, b^*) folgende Identität gilt:

$$\Phi(a^*, b^*)^\top (\Phi(a^*, b^*) - y) = 0\,.$$

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 20. Juli 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Mitteilung der Fachschaft:

O-Phase 2012 - Tutoren gesucht!

In der Woche vor Vorlesungsbeginn, vom 8. bis zum 12. Oktober, findet die O-Phase für die neuen Studierenden im Wintersemester 2012/13 statt. Wie immer suchen wir dafür Tutoren, die den neuen Erstis den Spaß am Studieren vermitteln! Weitere Informationen findest du unter `http://tutor.o-phase.com`.