Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

2. Übungsblatt vom 27. April 2012

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Zeigen Sie:
Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Für ein festes $i \in \{1, \ldots, m\}$ setzen wir $a = a^{(i)}$ und betrachten die (orthogonale) Projektion

$$P = I_n - \frac{aa^\top}{|a|^2}$$

auf $a^\perp$, das orthogonale Komplement von a. Mit der Notation $\overline{a}^{(j)} = Pa^{(j)}, j = 1, \ldots, m,$ gilt dann $\overline{a}^{(i)} = 0$ sowie

$$\operatorname{cone}\bigl(\{a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}, -a^{(i)}\}\bigr) = \Bigl\{x \in \mathbb{R}^n \colon Px \in \operatorname{cone}\bigl(\{\overline{a}^{(1)}, \ldots, \overline{a}^{(i-1)}, \overline{a}^{(i+1)}, \ldots, \overline{a}^{(m)}\}\bigr)\Bigr\}.$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe abgeschlossene Menge und $P_K \colon \mathbb{R}^n \to K$ die konvexe Projektion auf K, d.h. in der Notation von Satz 2.9 der Vorlesung: $P_K(x) = \hat{x}$ für $x \notin K$, wobei $\hat{x} \in K$ der Projektionspunkt ist, und $P_K(x) = x$ für $x \in K$. Zeigen Sie:

(a) P_K ist global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$, d.h.

$$|P_K(x) - P_K(y)| \leq |x - y| \quad \text{für alle } \; x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Falls K ein linearer Teilraum ist, dann ist $\hat{x} = P_K(x)$ charakterisiert durch

$$\hat{x} \in K \quad \text{und} \quad z^\top(x - \hat{x}) = 0 \quad \text{für alle } z \in K,$$

d.h. P_K stimmt mit der orthogonalen Projektion auf K überein.

Aufgabe 6: (8 Punkte)
Sei $K = \operatorname{cone}\bigl(\{x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\}\bigr) \subset \mathbb{R}^n$ ein endlich erzeugter konvexer Kegel. Dann heißt

$$K^P = \{y \in \mathbb{R}^n \colon y^\top x \leq 0 \text{ für alle } x \in K\}$$

der polare Kegel von K und $K^D = -K^P$ der duale Kegel von K.

(a) Veranschaulichen Sie sich den polaren Kegel im Fall $n = 2$ und mit

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Weisen Sie

$$K^P = \{y \in \mathbb{R}^n \colon y^\top x^{(i)} \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$$

nach.

(c) Zeigen Sie, dass

$$(K^P)^P = K$$

gilt.

(d) Beweisen Sie: Die konvexe Projektion $\hat{x} = P_K(x)$ von $x \in \mathbb{R}^n$ auf den Kegel K ist charakterisiert durch

$$\hat{x} \in K, \quad x - \hat{x} \in K^P, \quad \text{und} \quad (x - \hat{x})^\top \hat{x} = 0.$$

(e) Zeigen Sie: $P_K(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in K^P$.

Hinweis: Verwenden Sie in (c) das Lemma von Farkas.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 04. Mai 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie ihn zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.