Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

4. Übungsblatt vom 11. Mai 2012

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Sei $z \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Betrachten Sie für $1 \leq p \leq \infty$ das Minimierungsproblem:

$$\text{Minimiere } \|x - z\|_p \quad \text{unter} \quad x \in B_p = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_p \leq 1\}$$

mit $\|y\|_p = \left(\sum_{i=1}^2 |y_i|^p\right)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ und $\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|\}$.

(a) Zeigen Sie, dass B_1 und B_∞ polyedral sind.

(b) Bestimmen Sie für $p \in \{1, \infty\}$ die optimalen Punkte des Minimierungsproblems zu den Punkten

(i) $z = (2, 0)^\top$ und (ii) $z = (1, 1)^\top$.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Jedes zulässige Optimierungsproblem der Form

$$\text{Minimiere } f(x) \quad \text{unter} \quad x \in M = \{x \in X \colon g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$$

mit $X \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}^l$ und $h\colon X \to \mathbb{R}^m$ besitzt eine Lösung, falls

$$\inf\{f(x) \colon x \in M\} > -\infty.$$

(b) Das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{unter} \quad & x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 3,\ x_1 - 2x_2 \geq -1 \end{aligned}$$

ist zulässig und lösbar.

(c) Das duale Problem zu

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 0.6x_1 + x_2 \\ \text{unter} \quad & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ 2x_1 + x_2 \geq 3,\ x_1 + x_2 \geq 2.5,\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \end{aligned}$$

lautet

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & 3y_1 + 2.5y_2 + 4y_3 \\ \text{unter} \quad & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 0.6,\ y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 13: (3 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $0 \leq l \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das duale Problem von

$$\text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{über} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ -l \leq x \leq l\}$$

äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & (b + Al)^\top y_1 + 2l^\top y_2 \\ \text{über} \quad & \{y = (y_1^\top, y_2^\top)^\top \in \mathbb{R}^{m+n} : A^\top y_1 + y_2 \leq c,\ y_2 \leq 0\}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Leiten Sie aus dem starken Dualitätssatz die folgende verallgemeinerte Form des Lemmas von Farkas her:
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{m\times p},\ C \in \mathbb{R}^{k\times n},\ D \in \mathbb{R}^{k\times p},\ a \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt genau eine der folgenden beiden Möglichkeiten:

(1) $Ax + By \leq a,\ Cx + Dy = b,\ x \geq 0$ ist lösbar mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^p$.

(2) $A^\top z + C^\top w \leq 0,\ B^\top z + D^\top w = 0,\ z \leq 0,\ a^\top z + b^\top w > 0$ ist lösbar mit $z \in \mathbb{R}^m$ und $w \in \mathbb{R}^k$.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 18. Mai 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.