Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

5. Übungsblatt vom 18. Mai 2012

Aufgabe 15: (6 Punkte)
Seien die zueinander dualen linearen Programme

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{über } M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\},$$
$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad b^\top y \quad \text{über } N = \{y \in \mathbb{R}^m : A^\top y \leq c\}$$

gegeben. Beide Probleme (P) und (D) seien zulässig und $M^* \subset M$ und $N^* \subset N$ die jeweiligen Lösungsmengen. Zeigen Sie:

(a) Falls zu beliebigem, aber festem $k \in \{1, ..., n\}$ kein $y^* \in N^*$ mit $(c - A^\top y^*)_k > 0$ existiert, so gibt es ein $x^* \in M^*$ mit $(x^*)_k > 0$.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die zueinander dualen linearen Programme

$$(\tilde{D}) \quad \text{Maximiere} \quad -(e^{(k)})^\top A^\top y \quad \text{auf } \tilde{N} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \begin{pmatrix} A^\top \\ -b^\top \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} c \\ -\max(D) \end{pmatrix} \right\},$$
$$(\tilde{P}) \quad \text{Minimiere} \quad c^\top u - \lambda \max(D) \quad \text{über}$$
$$\tilde{M} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \begin{pmatrix} A & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = -Ae^{(k)}, \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0 \right\}.$$

(b) Es gibt ein $(x^*, y^*) \in M^* \times N^*$ mit $x^* + c - A^\top y^* > 0$.

Aufgabe 16: (6 Punkte)
Gegeben seien m Bewerber $B_1, \ldots, B_m$ und n Stellen $P_1, \ldots, P_n$. Jeder Bewerber kann höchstens eine Stelle erhalten und jede Stelle kann an höchstens einen Bewerber vergeben werden. Ferner sollen die einzelnen Stellen nur an qualifizierte Bewerber vergeben werden. Diese Eignung lässt sich durch die Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls der } i\text{-te Bewerber für die } j\text{-te Stelle geeignet ist,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

beschreiben. Außerdem sollen möglichst viele Stellen besetzt werden.

(a) Formulieren Sie dieses Optimierungsproblem als Flussmaximierungsaufgabe.

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz der obigen Optimierungsaufgabe zu:

$$\text{Maximiere} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \quad \text{unter } x_{i,j} \geq 0, \sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq 1, \; i = 1, \ldots, m,$$
$$\text{und} \sum_{i=1}^m x_{i,j} \leq 1, \; j = 1, \ldots, n. \qquad \text{(LP)}$$

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Ein Netzwerk-Administrator muss jeden Tag eine große Menge Daten von Server A zu Server E senden. Dazu müssen die Daten aber über einige andere Server umgeleitet werden, da keine direkte Verbindung zwischen A und E besteht. Die Leitungen zwischen den einzelnen Servern sind aber unterschiedlich gut ausgebaut. Zudem wird eine asynchrone Datenübertragung benutzt, so dass die Daten nur in eine Richtung schnell übertragen werden können. Deshalb wird näherungsweise davon ausgegangen, dass die Kanten des zugehörigen Netzwerkgraphen gerichtet sind. Die Kapazitäten der einzelnen Verbindungen (in GBit) sind folgender Tabelle zu entnehmen:

Quelle \ Ziel	B	C	D	E
A	2	6	3	0
B	0	0	0	6
C	2	0	3	2
D	0	0	0	2

(a) Helfen Sie dem Administrator einen möglichst hohen Datendurchsatz zu erreichen, damit der Datentransfer in schnellstmöglicher Zeit abgewickelt werden kann. Welcher Datendurchsatz kann erreicht werden?

(b) Durch zusätzliche Ressourcen könnte der Administrator die Kapazität von einer der bereits bestehenden Verbindungen um $3\,$GBit erhöhen. Für welche Verbindung soll er sich entscheiden?

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 25. Mai 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.