Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

6. Übungsblatt vom 25. Mai 2012

Aufgabe 18: (6 Punkte)
Wir betrachten ein Spiel, dessen Auszahlungsmatrix durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben sei. Zeigen Sie, ohne die optimalen Strategien der Spieler zu bestimmen, dass das Spiel unfair ist, d.h. das Folgendes gilt:

$$\min_{\substack{x \geq 0 \\ e^\top x = 1}} \max_{\substack{y \geq 0 \\ e^\top y = 1}} y^\top A x \neq 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie $\max\limits_{i=1,2,3} (Ax)_i \geq \frac{1}{3} e^\top Ax$ und unterscheiden Sie die Fälle $x_3 \in [0, 1-\varepsilon]$ und $x_3 \in [1-\varepsilon, 1]$ mit geeignetem $\varepsilon \in]0,1[$.

Aufgabe 19: (6 Punkte)
Rudi und Carla zelten gerne im Gebirge. Rudi mag die Berge und Carla mag die Täler. Deshalb ist die Wahl des Zeltplatzes schwierig für die beiden. Das Gebiet, in dem sie zelten wollen, wird von $m \in \mathbb{N}$ Wegen in Ost-West- und $n \in \mathbb{N}$ Wegen in Nord-Süd-Richtung durchzogen. Sie beschließen, an einer Kreuzung zu zelten, und als Kompromiss einigen sie sich darauf, dass Rudi den Ost-West-Weg wählen darf und Carla den Nord-Süd-Weg. Zudem kennen sie aus den vorher beschafften Karten die Höhenlagen der Kreuzungen.

(a) Formulieren Sie obigen Sachverhalt als ein Zwei-Personen-Matrixspiel. Dabei versucht Rudi, möglichst hoch zu zelten, hingegen Carla möglichst niedrig.

(b) Überlegen Sie sich, ob das Matrixspiel fair ist, bzw. was als fairer Ausgang interpretiert werden könnte.

(c) Betrachten Sie folgendes Beispiel für $m = n = 4$ mit den in der Tabelle stehenden Höhenmetern der Kreuzungen:

Ost-West $\setminus$ Nord-Süd	Weg 1	Weg 2	Weg 3	Weg 4
Weg 1	2000	1000	1500	2000
Weg 2	1500	3000	2000	4000
Weg 3	1500	4800	1000	1500
Weg 4	3000	4000	2000	2000

Zeigen Sie, dass in diesem Gebirge ein Sattelpunkt-Spiel entsteht. Bestimmen Sie die zugehörigen reinen optimalen Strategien und finden Sie heraus, auf wie vielen Metern die beiden zelten, wenn sie diese Strategien wählen.

Aufgabe 20: (2 Punkte)
Wir betrachten das Polyeder
$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, e^\top x = 1\}$$
mit $e = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ und bezeichnen mit E die Menge der Ecken von M.
Zeigen Sie, dass
$$E = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}\,.$$

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 01. Juni 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.