

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

8. Übungsblatt vom 08. Juni 2012

Aufgabe 24: (5 Punkte)

Sei M das Dreieck, das durch die positive x_1 - und x_2 - Achse sowie die Gerade $x_2 = 2(1 + \sqrt{2}) - x_1$ begrenzt wird.

Bestimmen Sie den Radius $r^* \geq 0$ und den Mittelpunkt $x^* \in \mathbb{R}^2$ des größten in M liegenden Kreises

- (a) geometrisch und
- (b) mit dem Simplexverfahren.

Aufgabe 25: (6 Punkte)

Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ sei das lineare Programm

$$(P) \quad \text{Minimiere } c^\top x \quad \text{unter} \quad Ax = b, x \geq 0,$$

gegeben, wobei $b \geq 0$ gelten soll. Weiterhin sei für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ das Hilfsproblem

$$(P') \quad \text{Minimiere } c^\top x + \alpha e^\top z \quad \text{unter} \quad Ax + z = b, x \geq 0, z \geq 0,$$

mit $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Zeigen Sie:

- (a) Es lässt sich sofort eine zulässige Basislösung für (P') angeben.
- (b) Falls $\begin{pmatrix} x^* \\ z^* \end{pmatrix}$ eine Lösung von (P') mit $z^* = 0$ ist, so ist x^* eine Lösung von (P) .
- (c) Ist (P) lösbar, so gibt es ein $\alpha^* > 0$, so dass für $\alpha > \alpha^*$ gilt: Das lineare Programm (P') ist lösbar, und für jede Lösung $\begin{pmatrix} x^* \\ z^* \end{pmatrix}$ von (P') gilt $z^* = 0$.
- (d) Versuchen Sie ausgehend von (a)-(c) einen Algorithmus zur Lösung von Problem (P) zu konstruieren, der lediglich Phase II des Simplex-Verfahrens benutzt.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Betrachten Sie zu $c \in \mathbb{R}^n$ das lineare Programm

$$(P) \quad \text{Minimiere } c^\top x \quad \text{unter} \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n.$$

- (a) Zeigen Sie, dass Phase II des Simplex-Verfahrens höchstens n Schritte zum Auffinden der Lösung benötigt.
- (b) Formulieren Sie das duale Problem und überprüfen Sie, ob sich für dieses ebenfalls direkt Phase II anwenden lässt.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 15. Juni 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.