Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

9. Übungsblatt vom 15. Juni 2012

Aufgabe 27: (5 Punkte)
Betrachten Sie das Skin-Spiel aus der Vorlesung, d.h. das Matrixspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass die optimale Strategie für Spieler 1

$$x^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

ist, indem Sie mit dem Simplex-Verfahren das zugehörige Optimierungsproblem lösen.

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Überprüfen Sie, ob die folgenden Gleichungssysteme nichtnegative Lösungen besitzen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 29: (4 Punkte)
In Anwendungen, z.B. aus den Wirtschaftswissenschaften, treten Optimierungsprobleme mit gebrochen linearer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen auf, d.h. von der Form

(GP) Minimiere $\dfrac{c^\top x + \alpha}{d^\top x + \beta}$ über $M := \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b \text{ und } x \geq 0\}$

mit $c, d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.
Zum Lösen von (GP) betrachten wir das lineare Programm

(LP) Minimiere $c^\top y + \alpha t$ unter $Ay = tb$, $d^\top y + \beta t = 1$, $y \geq 0$, $t \geq 0$.

Sei die Menge der Lösungen von (GP) nichtleer und ferner gelte $d^\top x + \beta > 0$ für alle $x \in M$.
Zeigen Sie: Das Problem (LP) ist lösbar und es gilt $\min(\text{LP}) = \min(\text{GP})$.

Aufgabe 30: (2 Punkte)
Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u^\top v \neq -1$. Beweisen Sie die Sherman-Morrison-Formel

$$(I_n + uv^\top)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + u^\top v} uv^\top.$$

Hinweis: Die Sherman-Morrison-Formel wird im revidierten Simplex-Verfahren verwendet, um aus $A(\mathrm{j})^{-1}$ die Inverse von $A(\tilde{\mathrm{j}})$ zu berechnen, vgl. Seite 65 im Skript "Optimierungstheorie" von A. Kirsch.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 22. Juni 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.