Skalarprodukte, Orthogonalität, unitäre Matrizen

Tobias Jahnke

1. Skalarprodukte und Normen

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Definition 1.1

Eine Abbildung $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt Skalarprodukt (scalar product, inner product), falls gilt:

(a) $\langle c_1 v_1 + c_2 v_2, w \rangle = c_1 \langle v_1, w \rangle + c_2 \langle v_2, w \rangle \quad \forall v_1, v_2, w \in V \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

(b) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in V$

(c) $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Folgerung:

(d)
$$\begin{aligned}\langle v, c_1 w_1 + c_2 w_2 \rangle &= \overline{\langle c_1 w_1 + c_2 w_2, v \rangle} \\ &= \overline{c_1 \langle w_1, v \rangle} + \overline{c_2 \langle w_2, v \rangle} \\ &= \overline{c_1} \langle v, w_1 \rangle + \overline{c_2} \langle v, w_2 \rangle\end{aligned}$$

(ähnlich wie (a), aber $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ statt c_1, c_2)

Beispiel 1.2

Das kanonische / euklidische Skalarprodukt auf $V = \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist definiert durch

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j} =: v \cdot w \,, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Bezeichnung: „dot product"

$\boxed{\text{Ü}}$ Die Eigenschaften aus Definition 1.1 sind erfüllt.

Bemerkung 1.3

Falls V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, lässt man in der Definition 1.1 alle „$\overline{\ldots}$" weg. Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ lautet

$$v \cdot w = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j \,.$$

Definition 1.4

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, \infty)$, $v \longmapsto \|v\|$ heißt <u>Norm</u> auf V, falls gilt:

(a) $\|cv\| = |c| \cdot \|v\| \qquad \forall c \in \mathbb{C}, v \in V$

(b) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \forall v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

(c) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

Lemma 1.5

Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V, dann ist

$$\|\cdot\| : v \longmapsto \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm, und es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

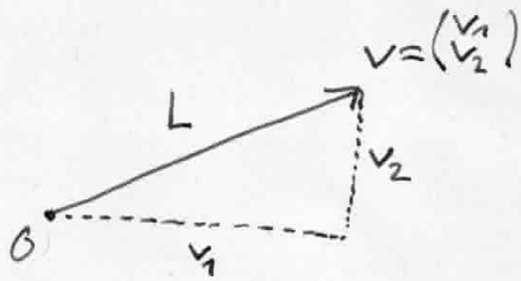
(Beweis weggelassen)

Beispiel 1.6

Für $V = \mathbb{C}^n$ und $\langle v,w\rangle = v \cdot w$ gilt

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j \overline{v_j}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2}$$

(„Länge" eines Vektors)



Pythagoras: $L^2 = v_1^2 + v_2^2$

$$\Rightarrow L = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} = \|v\|$$

2. Orthogonale Vektoren

Sei V Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$.

Definition 2.1

Zwei Vektoren $v, w \in V$ sind orthogonal zueinander, falls $\langle v, w \rangle = 0$.
Schreibweise: $v \perp w$

Beispiel 2.2

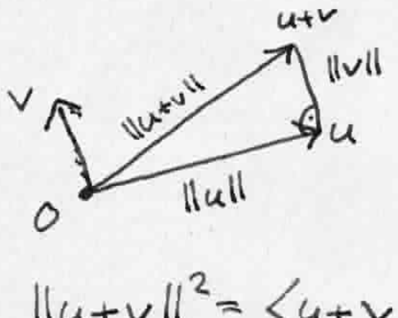
$V = \mathbb{R}^2, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

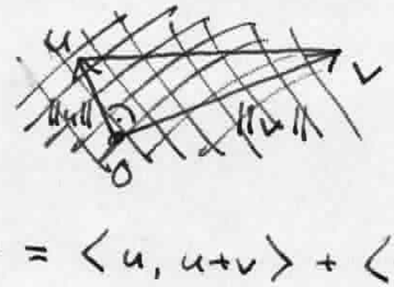
$$v \cdot w = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad v \perp w$$
$$v \cdot u = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3) = 2 - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad v \text{ nicht orthogonal zu } u$$

Lemma 2.3

Wenn $v, u \in V$ und $v \perp u$ ist, dann gilt

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$





Beweis: $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle$
$$= \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0 \text{ wegen } v \perp u} + \langle v, v \rangle$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Definition 2.4

Sei $m \in \mathbb{N}$, sei $u_1, \dots, u_k \in V$, $k \in \mathbb{N}$, $u_j \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, k$.
Die Vektoren $u_1, \dots, u_k$ heißen

- orthogonal, falls $\langle u_j, u_\ell \rangle = 0$ für alle $j \neq \ell$,
- orthonormal, falls $\langle u_j, u_\ell \rangle = 0$ für alle $j \neq \ell$ und
  $\langle u_j, u_j \rangle = \|u_j\|^2 = 1$ für alle $j = \{1, \dots, k\}$.

Lemma 2.5

Seien $u_1, \dots, u_k \in V$ orthogonal und $u_j \neq 0$ $\forall j$. Dann sind $u_1, \dots, u_k$ linear unabhängig und für jedes $v \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ gilt

$$v = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j .$$

Beweis:

Annahme: Es gibt $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ derart dass $\sum_{j=1}^{k} c_j u_j = 0$.
Dann gilt für alle $\ell \in \{1, \dots, k\}$

$$0 = \langle 0, u_\ell \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} c_j u_j, u_\ell \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} c_j \underbrace{\langle u_j, u_\ell \rangle}_{=0 \text{ für } j \neq \ell} = c_\ell \underbrace{\langle u_\ell, u_\ell \rangle}_{>0}$$

$\Rightarrow c_\ell = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, k$ $\Rightarrow$ $u_1, \dots, u_k$ linear unabhängig

Sei nun $v = \sum_{j=1}^{k} a_j u_j \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ mit $a_j \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\langle v, u_\ell \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{k} a_j u_j, u_\ell \Big\rangle = \sum_{j=1}^{k} a_j \underbrace{\langle u_j, u_\ell \rangle}_{=0 \text{ für } j \neq \ell} = a_\ell \underbrace{\langle u_\ell, u_\ell \rangle}_{= \|u_\ell\|^2 > 0}$$

$$\Rightarrow \quad a_\ell = \frac{\langle v, u_\ell \rangle}{\|u_\ell\|^2} \quad \text{für alle } \ell = 1, \dots, k.$$

$\blacksquare$

Bemerkung: Wenn $u_1, \dots, u_k \in V$ orthogonal sind, dann sind

$$\tilde{u}_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}, \; \dots, \; \tilde{u}_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

orthonormal.

Lemma 2.6

Sei $\dim(V) = n < \infty$ und sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine ~~Basis~~ Orthonormalbasis von V. Dann gilt für alle $v \in V$

(a) $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j$

(b) $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, u_j \rangle|^2$ (Plancherel-Gleichung)

Beweis:

(a) folgt aus Lemma 2.5. Zeige (b):

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j, v \Big\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \underbrace{\langle v, u_j \rangle}_{\in \mathbb{C}} u_j, v \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle v, u_j \rangle \langle u_j, v \rangle}_{= |\langle v, u_j \rangle|^2}$$

$\blacksquare$

3. Orthogonale und unitäre Matrizen

Definition 3.1

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Die Transponierte von A ist $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Die konjugiert Transponierte von A ist

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 4i & 5+6i \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4i & 7 \\ 2+3i & 5+6i & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4i & 7 \\ 2-3i & 5-6i & 8 \end{pmatrix}$$

Definition 3.2

(a) Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt unitär, falls $A^{-1} = A^*$.
($\Rightarrow A^*A = AA^* = I$ Identität)

(b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls $A^{-1} = A^t$.

Lemma 3.3

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär.

(b) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bzgl. des kanonischen Skalarprodukts.

(c) Die Zeilen von A bilden ....

(d) Für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

(e) Für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt $\|Av\| = \|v\|$.

Zeige (a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $[M]_{jk}$ der Eintrag in Zeile j und Spalte k einer Matrix M.

$$[A^*A]_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \overline{a_{lj}}\, a_{lk} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \text{Skalarprodukt der } k\text{-ten und } j\text{-ten Spalte}$$

$\| A$ unitär

$$[I]_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$