Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte
und Numerische Mathematik

Seminar im Wintersemester 2010/11

Mathematische Modelle

Tobias Jahnke, Andreas Arnold, Michael Kreim, Tudor Udrescu

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Quelle: Jedes vernünftige Physik-Lehrbuch.

Gegeben:	Draht der Länge $L > 0$.
Gesucht:	Temperatur $u(x,t)$ zur Zeit $t \geq 0$ im Punkt $x \in [0, L]$
Annahmen:	Die Dichte des Materials sei $\rho \in \mathbb{R}$ (konstant).
	Die spezifische Wärmekapazität sei $c_p > 0$.
	Es wird keine Wärme von Außen hinzugefügt oder nach Außen abgegeben.

Für jedes beliebige Teilintervall $[a, b] \subset [0, L]$ ist

$$\int_a^b \rho c_p u(x,t)\, dx$$

die Energie im Intervall $[a, b]$. Sei $j(x,t) \in \mathbb{R}$ der Energiefluss im Punkt x. Ist $j(x,t) > 0$, so fließt die Energie an der Stelle x von links nach rechts.

Für eine kleine Schritweite $h > 0$ die Erhaltungsgleichung

$$\underbrace{\int_a^b \rho c_p u(x,t+h)\, dx}_{(1)} = \underbrace{\int_a^b \rho c_p u(x,t)\, dx}_{(2)} + \underbrace{hj(a,t)}_{(3)} - \underbrace{hj(b,t)}_{(4)} + \mathcal{O}\big(h^2\big)\,. \tag{1}$$

Dabei ist

(1) die Energie im Intervall $[a, b]$ zur Zeit $t + h$

(2) die Energie im Intervall $[a, b]$ zur Zeit t

(3) der Energiefluss über die untere Grenze ins Intervall hinein (bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}\big(h^2\big)$)

(4) der Energiefluss über die obere Grenze aus dem Intervall hinaus (bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}\big(h^2\big)$)

Das Fouriersche Gesetz (Fourier 1807) sagt: Der Energiefluss ist proportional zum negativen Temperaturgradienten, d.h.

$$j(x,t) \;=\; -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{2}$$

Interpretation: Wo große Temperaturunterschiede sind, da fließt auch viel Energie. Der Faktor κ kann unter Umständen von x und u abhängen. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass $\kappa \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Wir setzen (2) in (1) ein und erhalten mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho c_p u(x,t+h)\,dx \;&=\; \int_a^b \rho c_p u(x,t)\,dx \;+\; h\kappa\left(\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(a,t)\right) \;+\; \mathcal{O}\big(h^2\big)\\ &=\; \int_a^b \rho c_p u(x,t)\,dx \;+\; h\kappa \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx \;+\; \mathcal{O}\big(h^2\big)\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^b \rho c_p u(x,t+h)\,dx - \int_a^b \rho c_p u(x,t)\,dx\right) \;=\; \kappa \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx \;+\; \mathcal{O}(h)\,.$$

Im Limes $h \longrightarrow 0$ erhalten wir damit

$$\int_a^b \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx \;=\; \kappa \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx.$$

Weil diese Gleichung für jedes beliebige Intervall $[a,b]$ gelten muss, können wir daraus folgern, dass

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \;=\; \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Setzt man nun $c = \kappa/(\rho c_p)$, so erhält man die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \;=\; c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$