Fourierreihen und trigonometrische Interpolation

Tobias Jahnke

Karlsruher Institut für Technologie

Seminar *Kompression*

Wintersemester 2015/16

Motivation

Ziel: Approximation einer periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Polynome sind nicht geeignet, Splines sind "unpraktisch".

Konkret: Approximation einer Funktion $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ durch trigonometrische Polynome.

Motivation

Ziel: Approximation einer periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Polynome sind nicht geeignet, Splines sind "unpraktisch".

Konkret: Approximation einer Funktion $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ durch trigonometrische Polynome.

Definition:

$$\mathcal{L}^2(0, 2\pi) = \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta < \infty \right\}$$

Raum aller quadratintegrierbaren Funktionen.
Innenprodukt und Norm:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) \, d\theta, \qquad \|f\|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)}.$$

Trigonometrische Polynome

Definition: Trigonometrisches Polynom

$$p(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (e^{i\theta})^k, \qquad \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Periodisch: $p(\theta) = p(\theta + 2\pi)$

$\mathcal{T}_n =$ Menge der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$.

Trigonometrische Polynome

Definition: Trigonometrisches Polynom

$$p(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (e^{i\theta})^k, \qquad \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Periodisch: $p(\theta) = p(\theta + 2\pi)$

$\mathcal{T}_n =$ Menge der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$.

Wenn $\alpha_k = \overline{\alpha_{-k}}$, dann gilt $p(\theta) \in \mathbb{R}$ und

$$p(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$$

mit $a_k = 2Re(\alpha_k)$ und $b_k = -2Im(\alpha_k)$ für $k = 1, \ldots, n$.

Approximation durch trigonometrische Polynome

Satz. Die Funktionen

$$v_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta}, \qquad k = -n, \dots n$$

bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{T}_n$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$p(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \sqrt{2\pi} v_k(\theta)$$

Approximation durch trigonometrische Polynome

Satz. Die Funktionen

$$v_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta}, \qquad k = -n, \dots n$$

bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{T}_n$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Äquivalent:

1. $p \in \mathcal{T}_n$ ist die beste Approximation an f in $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$, d.h.

$$\|f - p\|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} \leq \|f - q\|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} \quad \text{für alle } q \in \mathcal{T}_n.$$

2. $p(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\theta}$ mit

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \, d\theta.$$

Fourierreihen

Bestapproximation durch Fourierpolynome:

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\theta} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \, d\theta.$$

Frage: Konvergenz für $n \to \infty$?

Fourierreihen

Bestapproximation durch Fourierpolynome:

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\theta} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta.$$

Frage: Konvergenz für $n \to \infty$?

Definition. Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\theta} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta$$

heißt (formale) Fourierreihe von f.

Konvergenz von Fourierreihen

Satz.

1. Für $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ konvergiert die Fourierreihe bezüglich $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)}$ gegen f.

Konvergenz von Fourierreihen

Satz.

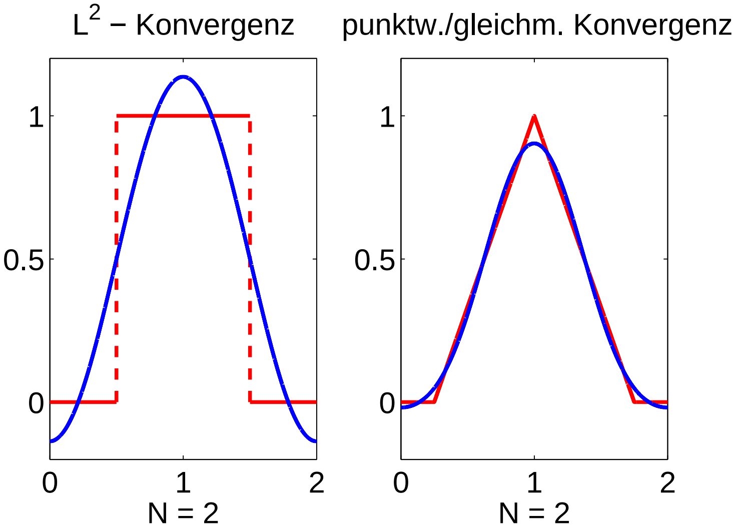
1. Für $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ konvergiert die Fourierreihe bezüglich $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)}$ gegen f.
2. Sei $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ stetig, stückweise stetig differenzierbar, und sei $f(0) = f(2\pi)$.
   Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.

Konvergenz von Fourierreihen

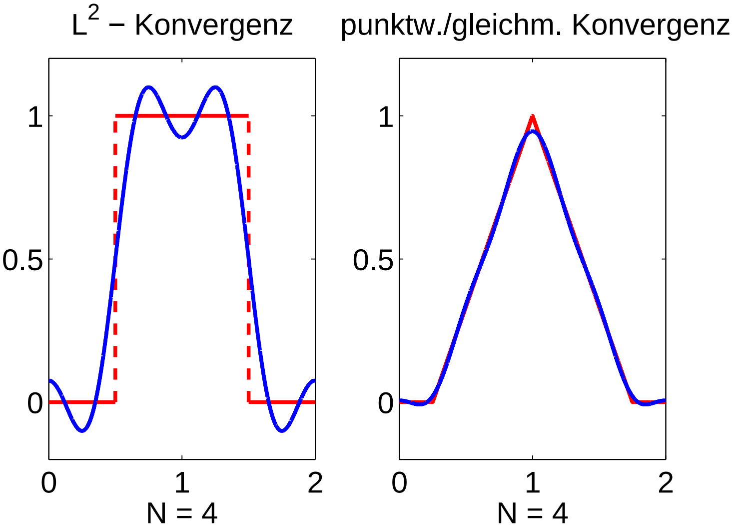
Satz.

1. Für $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ konvergiert die Fourierreihe bezüglich $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)}$ gegen f.
2. Sei $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ stetig, stückweise stetig differenzierbar, und sei $f(0) = f(2\pi)$.
   Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.
3. Konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen g, so gilt $g = f$ fast überall.

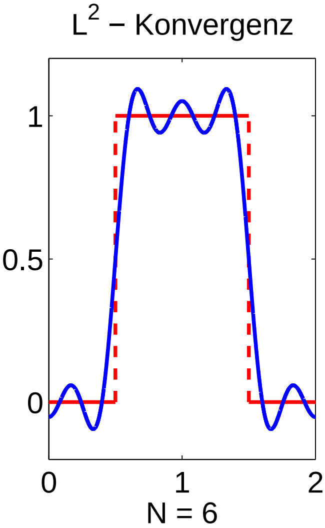
Konvergenz von Fourierreihen

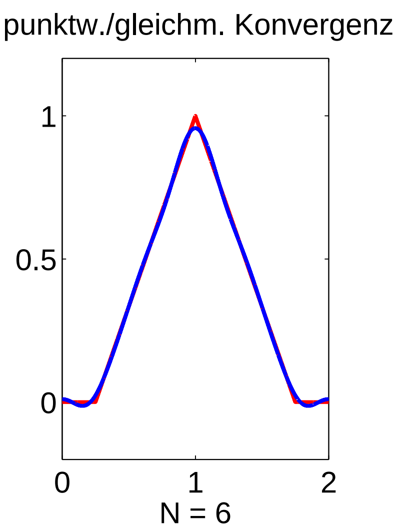


Konvergenz von Fourierreihen

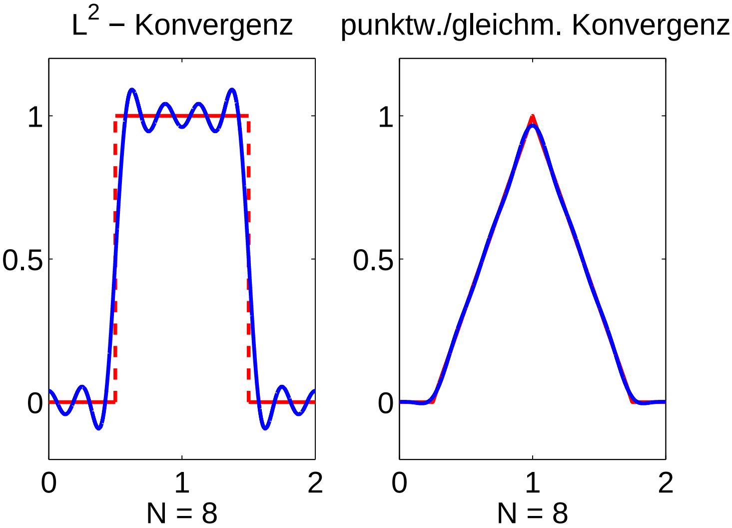


Konvergenz von Fourierreihen

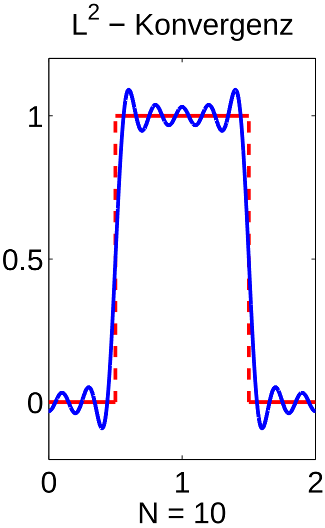


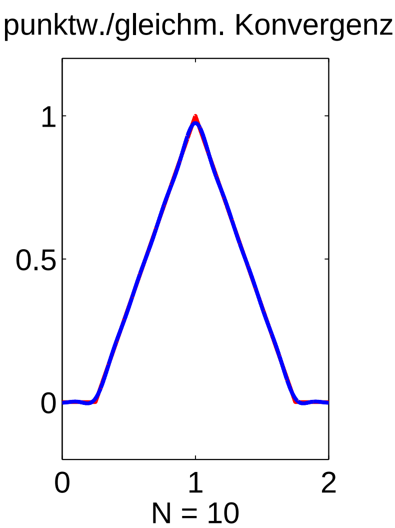


Konvergenz von Fourierreihen

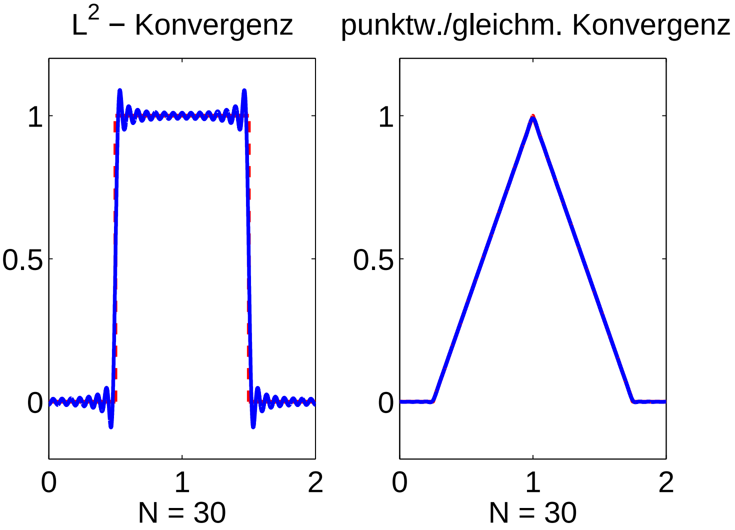


Konvergenz von Fourierreihen





Konvergenz von Fourierreihen



Konvergenz von Fourierreihen

Soboleväume:

$$H^1(0,2\pi) = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(0,2\pi) : f' \in \mathcal{L}^2(0,2\pi) \right\}$$
$$H^1_\pi(0,2\pi) = \left\{ f \in H^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) \right\} \qquad \text{(periodisch)}$$
$$H^k_\pi(0,2\pi) = \left\{ f \in H^k(0,2\pi) : f' \in H^{k-1}_\pi(0,2\pi) \right\}$$

(setze $H^0_\pi(0,2\pi) := \mathcal{L}^2(0,2\pi)$)

Konvergenz von Fourierreihen

Soboleväume:

$$H^1(0,2\pi) = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(0,2\pi) : f' \in \mathcal{L}^2(0,2\pi) \right\}$$
$$H^1_\pi(0,2\pi) = \left\{ f \in H^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) \right\} \qquad \text{(periodisch)}$$
$$H^k_\pi(0,2\pi) = \left\{ f \in H^k(0,2\pi) : f' \in H^{k-1}_\pi(0,2\pi) \right\}$$

(setze $H^0_\pi(0,2\pi) := \mathcal{L}^2(0,2\pi)$)

Lemma. Für $f \in \mathcal{L}^2(0,2\pi)$ gilt

$$f \in H^1_\pi(0,2\pi) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\alpha_k|^2 < \infty$$

Konvergenz von Fourierreihen

Sobolevräume:

$$H^1(0,2\pi) = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(0,2\pi) : f' \in \mathcal{L}^2(0,2\pi) \right\}$$
$$H^1_\pi(0,2\pi) = \left\{ f \in H^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) \right\} \qquad \text{(periodisch)}$$
$$H^k_\pi(0,2\pi) = \left\{ f \in H^k(0,2\pi) : f' \in H^{k-1}_\pi(0,2\pi) \right\}$$

(setze $H^0_\pi(0,2\pi) := \mathcal{L}^2(0,2\pi)$)

Satz. Ist $f \in H^1_\pi(0,2\pi)$, so konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig in $[0,2\pi]$ gegen f.

Folgerung: $f \in H^1_\pi(0,2\pi) \Longrightarrow f$ stetig und 2π-periodisch.

Trigonometrische Interpolation

Betrachte nun wieder trigonometrische Polynome ("abgeschnittene Fourierreihen").

Bestapproximation durch Fourierpolynome:

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\theta} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \, d\theta.$$

Problem: Kann das Integral meist nicht analytisch berechnen.
Lösung: Approximiere Integral durch Trapezregel.

Trigonometrische Interpolation

Approximiere Integral durch Trapezregel:
Wähle $N \in \mathbb{N}$, setze $h = 2\pi/N$, $\theta_j = jh$ und approximiere

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta \quad \approx \quad \frac{h}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} f(\theta_j)e^{-ik\theta_j} =: \hat{\alpha}_k$$

Trigonometrische Interpolation

Approximiere Integral durch Trapezregel:
Wähle $N \in \mathbb{N}$, setze $h = 2\pi/N$, $\theta_j = jh$ und approximiere

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta \quad \approx \quad \frac{h}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1} f(\theta_j)e^{-ik\theta_j} =: \hat{\alpha}_k$$

Satz. Für alle $g \in H_\pi^k(0,2\pi)$ mit $0 < k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta - h\sum_{j=0}^{N-1} g(\theta_j)\right| \le C_k \|g\|_{H_\pi^k(0,2\pi)} h^k.$$

Ordnung k statt 2 falls g hinreichend regulär.

Trigonometrische Interpolation

Sei $N = 2n$ gerade und $f \in H^1_\pi(0, 2\pi)$. Approximiere

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n+1}^{n} \hat{\alpha}_k e^{ik\theta} =: p_n(\theta) \quad \text{mit} \quad \hat{\alpha}_k \approx \alpha_k.$$

Anzahl der Summanden $= 2n = N =$ Anzahl der Quadraturpunkte (modulo Periodizität).

Trigonometrische Interpolation

Sei $N = 2n$ gerade und $f \in H^1_\pi(0, 2\pi)$. Approximiere

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n+1}^{n} \hat{\alpha}_k e^{ik\theta} =: p_n(\theta) \quad \text{mit} \quad \hat{\alpha}_k \approx \alpha_k.$$

Wegen Quadratur ist p_n nicht die Bestapproximation. Aber:

Trigonometrische Interpolation

Sei $N = 2n$ gerade und $f \in H^1_\pi(0, 2\pi)$. Approximiere

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n+1}^{n} \hat{\alpha}_k e^{ik\theta} =: p_n(\theta) \quad \text{mit} \quad \hat{\alpha}_k \approx \alpha_k.$$

Wegen Quadratur ist p_n nicht die Bestapproximation. Aber:

Lemma. Das trigonometrische Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ interpoliert f in den Stützstellen, d.h.

$$p_n(\theta_j) = f(\theta_j).$$

$p_n \in \mathcal{P}_n$ heißt das trigonometrische Interpolationspolynom von f.

Trigonometrische Interpolation

Sei $N = 2n$ gerade und $f \in H^1_\pi(0, 2\pi)$. Approximiere

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n+1}^{n} \hat{\alpha}_k e^{ik\theta} =: p_n(\theta) \quad \text{mit} \quad \hat{\alpha}_k \approx \alpha_k.$$

Wegen Quadratur ist p_n nicht die Bestapproximation. Aber:

Lemma. Das trigonometrische Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ interpoliert f in den Stützstellen, d.h.

$$p_n(\theta_j) = f(\theta_j).$$

$p_n \in \mathcal{P}_n$ heißt das trigonometrische Interpolationspolynom von f.

Genauigkeit: Für $f \in H^k_\pi(0, 2\pi)$ gilt

$$\|f - p_n\|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} \leq C_k n^{-k} \|f\|_{H^k_\pi(0,2\pi)}$$

Trigonometrische Interpolation

Sei $N = 2n$ gerade und $f \in H^1_\pi(0, 2\pi)$. Approximiere

$$f(\theta) \approx \sum_{k=-n+1}^{n} \hat{\alpha}_k e^{ik\theta} =: p_n(\theta) \quad \text{mit} \quad \hat{\alpha}_k \approx \alpha_k.$$

Wegen Quadratur ist p_n nicht die Bestapproximation. Aber:

Lemma. Das trigonometrische Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ interpoliert f in den Stützstellen, d.h.

$$p_n(\theta_j) = f(\theta_j).$$

$p_n \in \mathcal{P}_n$ heißt das trigonometrische Interpolationspolynom von f.

Vorteil: Ableitungen $\longleftrightarrow$ Multiplikationen

Trigonometrische Interpolation

Nächste Woche: Schnelle (inverse) Fouriertransformation.

$$\big(f(\theta_0), \dots, f(\theta_{N-1})\big) \quad \stackrel{\text{FFT}}{\longleftrightarrow} \quad (\hat{\alpha}_{-n+1}, \dots, \hat{\alpha}_n)$$

Zusammenfassung

- Motivation: Approximation von periodischen Funktionen
- Trigonometrische Polynome, Bestapproximation
- Konvergenz von Fourierreihen
- "Approximation der Bestapproximation":
  Approximation $\hat{\alpha}_k \approx \alpha_k$ durch Trapezregel
  Trigonometrische Interpolation

Fourierreihen und trigonometrische Interpolation

Tobias Jahnke

Karlsruher Institut für Technologie

Seminar *Kompression*

Wintersemester 2015/16