Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

- Wie wird Wasserverteilung im Boden beschrieben?
- Wie wird die Ausbreitung von Verschmutzung beschrieben?
- Wie wird ein biologischer Abbauprozess beschrieben?
- Wie werden Unsicherheiten (Materialparameter) quantifiziert?
- Wie können die Parameter gemessen werden?
- Wie kann der Prozess (etwa durch Abpumpen) gesteuert werden? Vereinfachung möglich?

Numerische Methodenentwicklung:

- Wie können die Modelle approximiert werden?
- Ist das approximierte Modell eindeutig lösbar?
- Konvergieren die Approximationen?
- Wie berechnet man die Approximation effizient?
- Wie werden die Algorithmen realisiert?
- Wie werden die Ergebnisse dargestellt?
- Wie kann man die Effizienz / Qualität der Approximation / Algorithmen quantifizieren?

Struktur der Lösung einer Praktikumsaufgabe:

1. Problemstellung
2. Mathematisches Modell
3. Konfiguration eines Beispiels (Daten)
4. Numerische Methoden
5. Visualisierung der Ergebnisse
6. Qualitative Auswertung
7. Diskussion der Ergebnisse (Insgesamt 1-2 Seiten)

Ergänzung B.Sc.-Arbeit (Literaturrecherche)

- Eigenschaften des Modells
- Eigenschaften der Num. Verfahren (Insgesamt 40-60 Seiten)

Anforderung Promotion: neue Methode / neues Ergebnis.

1 Die Potentialströmung

Problem

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschreibe eine poröse Bodenschicht.
Von oben sickert Regenwasser langsam nach unten ins Grundwasser.
Bestimme die transportierte Wassermenge und deren Verteilung.

Modell

Sei $q : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ der 'Fluss' und $\rho : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Massendichte, d.h. in jedem Kontrollvolumen $Y \subset \Omega$ ist

$$\int_Y \rho(x,t)dx \qquad \text{(Wasser-) Menge in } Y$$

$$\frac{d}{dt}\int_Y \rho(x,t)dx = -\int_{\partial Y} \rho(x,t)q(x,t)\cdot n da = -\int_Y \operatorname{div}(\rho q) da \qquad \text{Bilanzgleichung}$$

Y beliebig $\to \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho q) = 0$

Spezialfall

$$\begin{aligned} \text{Strömung stationär: } \partial_t \rho &\equiv 0 \\ \text{Dichte konstant: } \rho &\equiv \rho_0 \\ \Rightarrow \operatorname{div} q &= 0 \end{aligned}$$

Darcy- Gesetz

$$\begin{aligned} q = K(\nabla p - G) \text{ mit } p &: \Omega \to \mathbb{R} && \text{hydrostatischer Druck} \\ K &: \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}_{Sym} && \text{Permeabilitätstensor} \\ G &= (0,0,\rho_0 g_0)^T && \text{Gravitation} \end{aligned}$$

Spezialfälle

$$\begin{aligned} K &= kI && \text{isotrop = in alle Richtungen gleich} \\ k &\equiv k_0 && \text{unabhängig vom Ort} \end{aligned}$$

(Reskalierung der Einheiten $\rho_0 g_0 \equiv 1$.)

Hilfsgröße

$$\begin{aligned} u(x) = p(x) + \rho q x_3 &\Rightarrow q = K\nabla u \\ &\Rightarrow \operatorname{div} q = \operatorname{div} K\nabla u = 0 \end{aligned}$$

Spezialfall

$K \equiv k_0 I \Rightarrow \operatorname{div} \nabla u = \Delta u = 0$ Laplace - Gleichung

Randwerte:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} q dx = \int_{\partial\Omega} q \cdot n da = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= \{x \in \partial\Omega : q(x) \cdot n(x) < 0\} \\ \Gamma_{out} &= \{x \in \partial\Omega : q(x) \cdot n(x) > 0\} \end{aligned}$$

$$\text{gilt: } \int_{\Gamma_{in}} q \cdot n da = -\int_{\Gamma_{out}} q \cdot n da$$

Randwertaufgabe

Sei $\Gamma_D \subset \partial\Omega$

$$\begin{aligned} u_D &: \Gamma_D \Rightarrow \mathbb{R} && \text{Dirichlet-Werte} \\ g_N &: \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D \to \mathbb{R} && \text{Neumann-Werte} \end{aligned}$$

bestimme

$$\begin{aligned} u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ mit div } K\nabla u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_D \\ K\nabla u \cdot n &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

2D- Reduktion

Sei $\Omega_0 = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, 0, x_3) \in \Omega\}$ ein Querschnitt. Die Lösung sei lokal bei Ω_0 symmetrisch um $x_2 = 0$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & \partial_2 u = 0, u_0(x_1,x_3) = u(x_1,0,x_3) \\ \Rightarrow & \text{es gilt div } K_0 \nabla u_0 = 0 \text{ mit } K_0(x_1,x_3) \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym} \\ \text{allgemein:} & \Omega \subset \mathbb{R}^D \ (D = 2 \text{ oder } 3), K \in \mathbb{R}^{D\times D}_{sym}. \end{array}$$

2D Beispiel

Sei $\Omega = (0,1)^2, \Gamma_D = [0,1] \times \{0\}, u_D \equiv 0, K = I$

$$g_N(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x_2 = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Exakte Lösung:

$$\begin{aligned} u(x) &= -x_2 \\ \Rightarrow \nabla u &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \Delta u = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla u \cdot n = \begin{cases} -1 & \text{falls } x_2 = 1 \\ 1 & \text{falls } x_2 = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schwache Formulierung

Sei $\Phi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Testfunktion mit $\Phi = 0$ auf Γ_D.

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_N} g_N \Phi da = \int_{\partial\Omega} g_N \Phi da = \int_{\partial\Omega} q \cdot n \Phi da = \int_{\Omega} \operatorname{div}(q\Phi) dx = \int_{\Omega} q \cdot \nabla \Phi dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla \Phi dx = \int_{\Gamma_N} g \Phi da.$$

$\succ$

2 Finite - Elemente - Approximation

Idee

Konstruiere geeigneten Ansatzraum V_h und berechne $u_h \in V_h$ mit $u_h \approx u_D$ auf Γ_D und

$$\int\limits_{\Omega} K\nabla u_h \cdot \nabla \Phi_h dx = \int\limits_{\Gamma_N} g\Phi_h da \ \forall \Phi_h \in V_h \text{ mit } \Phi_h = 0 \text{ auf } \Gamma_D.$$

Spezialfall

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygongebiet und sei $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{\tau \in \mathscr{T}} \overline{\tau}$ eine Zerlegung in $\underbrace{\text{Dreiecke/Vierecke.}}_{\text{Zellen}}$

$$\tau = \operatorname{conv} \mathscr{N}_\tau, \ \mathscr{N} = \bigcup_{\tau \in \mathscr{T}} \mathscr{N}_\tau$$

$$\text{mit } \mathscr{N}_\tau = \begin{cases} \{z_{(\tau,0)}, z_{(\tau,1)}, z_{(\tau,2)}\} \subset \mathbb{R}^2 & \text{Dreieck} \\ \{z_{(\tau,00)}, z_{(\tau,10)}, z_{(\tau,11)}, z_{(\tau,01)}\} \subset \mathbb{R}^2 & \text{Viereck} \end{cases}$$

(2.1) Definition
Die Zerlegung $\mathscr{T}$ ist zuläßig, wenn

$$\operatorname{conv}(\mathscr{N}_\tau \cap \mathscr{N}_{\tau'}) = \operatorname{conv} \mathscr{N}_\tau \cap \operatorname{conv} \mathscr{N}_{\tau'}, \tau, \tau' \in \mathscr{T},$$

d.h. der Durchschnitt von zwei Zellen ist leer, eine Ecke, oder eine Kante/ Seite.

Idee

wähle Knotenwerte $u(z)$ für $z \in \mathscr{N}_\tau$ interpoliere die Werte (bi-)linear in τ.

Referenzdreieck

$$\hat{\tau} = \operatorname{conv}\{\hat{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\varphi_\tau = z_{\tau,0} + F_\tau \xi, \ \xi \in \hat{\tau}, \ F_\tau \equiv D_{\varphi_\tau}$$

$\hat{V} = \{\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ mit

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_0(\xi) &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ \hat{\phi}_1(\xi) &= \xi_1 \\ \hat{\phi}_2(\xi) &= \xi_2 \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \hat{\phi}_i(\hat{z}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$V_\tau = \quad \{\phi_i\} = P_1(\tau) \ \text{ mit } \phi_i = \hat{\phi} \cdot \varphi_\tau^{-1}$$

$$\phi_i(z_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Referenzviereck

$$\hat{\tau} = \text{conv}\{\hat{z}_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z}_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{z}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{00}(\xi) &= (1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ \hat{\phi}_{01}(\xi) &= (1-\xi_1)\xi_2 \\ \hat{\phi}_{10}(\xi) &= \xi_1(1-\xi_2) \\ \hat{\phi}_{11}(\xi) &= \xi_1\xi_2 \\ \varphi_\tau(\xi) &= \sum_{i,j} \hat{\phi}_{i,j} z_{ij}, F_\tau(\xi) = D_{\varphi_\tau}(\xi) \end{aligned}$$

Finite- Elemente- Ansatzraum

$$\begin{aligned} V_h &= \{\phi \in C(\overline{\Omega}) : \phi|_\tau \in V_\tau, \tau \in \mathscr{I}\} \\ h &= \max_{\tau \in \mathscr{I}} diam(\tau) \\ V_h(u_D) &= \{\phi_h(z) = u_D(z), z \in \mathscr{N}_\tau \cap \Gamma_D\} \end{aligned}$$

Finite- Elemente- Approximation

bestimme $u_h \in V_h(u_D)$ mit

$$\int_\Omega K \nabla u_h \cdot \nabla \phi_h dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot \phi_n da, \forall \phi_h \in V_h(0)$$

Algebraische Formulierung

$N = |\mathscr{N}_\tau|, \mathscr{N}_\tau = \{z_1, ..., z_N\}$
bestimme $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ mit $U_h = \sum \underline{u_n} \phi_n \in V(u_D)$ und

$$\sum_{n=1}^{N} \underline{u_n} \int_{\Omega} K \nabla \phi_n \cdot \nabla \phi_k dx = \int_{\Gamma_N} f \cdot \phi_k da, \forall \phi_k \in V_h(0) \text{ mit } \phi_n \in V_h \text{ Knoten- Basis, d.h.}$$

$$\phi_n(z_k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

definiere $\mathscr{I}_D = \{k : z_k \in \Gamma_D\}$

$$A \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ mit } \underline{A}[k,n] = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} K \nabla \phi_n \cdot \phi_k dx & k \notin \mathscr{I}_D \\ 1 & n = k \in \mathscr{I}_D \\ 0 & n \neq k \in \mathscr{I}_D \end{cases}$$

$$b \in \mathbb{R}^N \ \text{ mit } \underline{b}[k] = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} g \cdot \phi_k da & k \notin \mathscr{I}_D \\ u_D(z_k) & k \in \mathscr{I}_D \end{cases}$$

löse $\underline{A}\underline{u} = \underline{b} \Rightarrow \underline{u_k} = u_D(z_k), k \in \mathscr{I}_D$.

Assemblieren

Wiederholung:

$$\begin{aligned} \Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathscr{N} = \{z_1, ..., z_N\} \subset \overline{\Omega}, \Gamma_D \subset \partial\Omega \\ \overline{\Omega} = \bigcup \overline{\tau}, \overline{\tau} = \operatorname{conv} \mathscr{N}_\tau = \varphi_\tau(\hat{\tau}) \\ \mathscr{I}_D = \{n : z_n \in \Gamma_D\}, \mathscr{I}_\tau = \{n : z_n \in \mathscr{N}_\tau\} \\ V_h = \qquad \{\phi_1, ..., \phi_N\} \text{ Knotenbasis mit} \end{aligned}$$

$$\phi_n(z_k) = \begin{cases} 1 & n \neq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{A}[n,k] = \int_{\Omega} K \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_n dx = \sum_{\tau \in \mathscr{I}} \int_{\tau} K \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_n dx = \sum_{\tau \in \mathscr{I}} \int_{\hat{\tau}} \det F_\tau K \cdot \varphi_\tau \nabla(\phi_k \cdot \varphi_\tau) \cdot \nabla(\phi_n \cdot \varphi_\tau) d\hat{x}$$
$$= \sum_{\tau \in \mathscr{I}} \sum_{\xi \in H_{\hat{\tau}}} w_\xi \det F_\tau(\xi) (K \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_n)(\varphi_\tau(\xi)), \text{ falls } K \equiv K|_\tau \text{ konstant in } \tau.$$

Quadratur:
Referenzdreieck:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \operatorname{conv}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \\ H_{\hat{\tau}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, w_\xi = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Referenzviereck:

$$\begin{aligned}
\hat{\tau} &= [0,1]^2, \\
H_{\hat{\tau}} &= \{\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\ 1-\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\alpha\\ 1-\alpha\end{pmatrix}\}, \\
w_\xi &= \frac{1}{4} \text{ mit } \alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \\
Q_2(t) &= (t-\alpha)(t-(1-\alpha)) \text{ Orthogonalpolynom in } [0,1]
\end{aligned}$$

Nummerierung:

$$\mu_\tau \colon I_{\hat{\tau}} \to I_h = \{1,...,N\}, I_{\hat{\tau}} = \begin{cases} \{0,1,2\} \\ \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

in τ gilt $\phi_k(x) = \hat{\phi}_i \cdot \varphi_\tau^{-1}(x)$ mit $\mu_\tau(i) = k$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow D\phi_k(x) = \hat{D}\hat{\phi}_i(\hat{x}) D\varphi_\tau^{-1}(x) \text{ mit } \varphi_\tau(\hat{x}) = x \\
\Rightarrow \nabla\phi_k(x) = F_\tau^{-T}(\hat{x})\hat{\nabla}\hat{\phi}_i(\hat{x}) \\
\nabla\phi_k(x) = D\phi_k(x)^T \text{ denn } D\varphi_\tau^{-1} = (\hat{D}\varphi_\tau(\hat{x}))^{-1}
\end{aligned}$$

(2.2) Satz
Sei K symmetrisch und uniform positiv definit (d.h. $Ky \cdot y \geq k_0|y|^2 \ \forall y \in \mathbb{R}^D$ mit $k_0 > 0$) und sei $\mathscr{I}_D \neq \emptyset$. Dann ist A regulär und auf $\underline{V_h}(0) = \{\underline{u} \in \mathbb{R}^N : \underline{u}[n] = 0, n \in I_D\}$ symmetrisch positiv definit.

Beweis. $\underline{Au} = \underline{b} \Rightarrow \underline{u}[n] = \underline{b}[n]$ für $n \in I_D$
$\underline{u} = \underline{u_D} + \underline{v}, \underline{v} \in \underline{V_h}(0)$ mit

$$\underline{u_D} = \begin{cases} u_D(z_n) & n \in I_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

per Konstruktion ist $\underline{A}[n,k] = \underline{A}[k,n], k,n \in I_D$.
Sei

$$\underline{A}\underline{v} \cdot \underline{v} = \sum_\tau \sum_\xi (K\nabla\underline{v} \cdot \nabla\underline{v})\varphi_\tau(\xi) \det F_\tau(\xi) w_\xi \geq k_0 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \text{ mit } v = \sum \underline{v}[n]\phi_n$$

also: $\underline{A}\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow |\nabla v| \equiv 0 \Rightarrow v \equiv \text{const.}$
$v(z_n) = 0$ für $n \in \mathscr{I}_D \Rightarrow v \equiv 0.$ □

Bemerkung

Im Folgenden sei

$$\underline{A_0}[n,k] = \begin{cases} \underline{A}[n,k] & n,k \notin \mathscr{I}_D \\ 1 & n = k \in I_D \\ 0 & n \neq k \in \mathscr{I}_D \\ 0 & k \neq n \in \mathscr{I}_D \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{u_0} + \underline{u_D} \\ \Rightarrow \underline{A_0} u_0 &= \underline{b} - \underline{A}\underline{u_D} \end{aligned}$$

also o.E. A ist symmetrisch positiv definit.

3 Lösen von dünn besetzten LGS

Betrachte eine Familie von LGS $Au = b$ in $\mathbb{R}^N$.
Sei $I = \{1,...,N\}$ Index- Menge, $|I| = N$, $G = \{(n,k) \in I \times I : A[k,n] \neq 0\}$ Matrixgraph.

(3.1) Definition
Eine Matrix heißt dünn besetzt , wenn $|G| = O(N)$. Sonst heißt sie voll besetzt.

(3.2) Lemma
Sei $I_\tau = \{n \in I : \tau \subset supp\phi_n\} = \{n \in I : z_n \in \mathcal{N}_\tau\}$.

a) Dann gilt für den Graph der FE- Matrix

$$\begin{aligned} & G \subset \bigcup I_\tau \times I_\tau \\ \textit{und} \quad & |G| \leq N(\max_{n\in I} |\{\tau : z_n \in \mathcal{N}_\tau\}| + 1) \end{aligned}$$

Bem (D=2): Sei γ_0 der kleinste Innenwinkel aller Zellen τ. Dann ist $|G| \leq (\frac{2\pi}{\gamma_0} + 1)N$.

b) Das Assemblieren benötigt $O(N)$ Operationen.

c) Die Multiplikation Au benötigt $O(N)$ Operationen.

d) Das compressed row storage format benötigt $O(N)$ Speicher:
Sei $M = |G|$ die Anzahl der Matrixeinträge ungleich Null.

$$\begin{aligned} \textit{Sei} \quad a[m] \quad & ,m = 1...,M,\ \textit{Vektor der Matrixeinträge} \neq 0 \\ c[m] \quad & \in \{1,...,N\}\ \textit{Spaltenindex von}\ a[m] \\ d[n] \quad & \in \{1,...,M+1\}, n = 1,N+1\ \textit{mit}\ d[1] = 1, d[N+1] = M+1\ \textit{Diagonalpointer.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A[n,c[m]] &= a[m]\ \textit{für}\ m = d[n],...,d[n+1]-1, n = 1,...,N \\ \Rightarrow (Au)[n] &= \sum_{m=d[n]}^{d[n+1]-1} a[m]u[c[m]] \end{aligned}$$

Assemblieren

$$\begin{aligned} \text{Sei } A_\tau[i,j] &= \int_\tau K\nabla(\hat{\phi}_j \circ \varphi_\tau^{-1})dx \\ \mathcal{N}_\tau &= \{z_{\mu_\tau(i)} : 1 \leq i \leq N_\tau\} \subset \mathcal{N}, N_\tau = |\mathcal{N}_\tau| \\ A &= \sum_\tau R_\tau^T A_\tau R_\tau \text{ mit } R_\tau \in \mathbb{R}^{N_\tau \times N} \end{aligned}$$

$$R_\tau[i,n] = \begin{cases} 1 & \mu_\tau(i) = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nested Dissection

Sei $\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_{p\in\mathscr{P}} \Omega^p}, \mathscr{P} = \{1,...,P\}, \Omega^p \cap \Omega^q = \emptyset$ mit $p,q \in P, p \neq q$ eine nichtüberlappende Gebietszerlegung mit Skeleton $\Gamma_{\mathscr{P}} = \Omega \cap (\cup \partial\Omega^p)$.

$$\begin{aligned}
\text{Seien } I^p &= \{n : z_n \in \overline{\Omega^p} \setminus \Gamma_{\mathscr{P}}\} \text{ Indizes zu inneren Knotenpunkten in } \Omega^p \\
I_\Gamma &= I \setminus \bigcup_{p\in P} I^p \text{ Interface- Indizes}
\end{aligned}$$

Dann gilt: $A[n,k] = 0$ für $n \in \Omega^p, k \in \Omega^q (p \neq q)$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & & 0 & A_{\Gamma 1} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & A_{pp} & A_{\Gamma p} \\ \hline A_{1\Gamma} & \cdots & A_{p\Gamma} & A_{\Gamma\Gamma} \end{array}\right) \text{ Aufwand in 2D: } O((\tfrac{N}{P})^2) + O((P(\tfrac{N}{P})^{\frac{1}{2}})^3)$$

(3.3) Lemma
Wenn A symmetrisch positiv definit ist, dann ist das Schurkomplement

$$S = A_{\Gamma\Gamma} - \sum_{p\in\mathscr{P}} A_{\Gamma p} A_{pp}^{-1} A_{p\Gamma}$$

ebenfalls symmetrisch positiv definit, und es gilt für $u = A^{-1}b$:

$$u_\Gamma = S^{-1}(b_\Gamma - \sum A_{pp}^{-1} A_{p\Gamma} b_p), u_p = A_{pp}^{-1}(b_p - A_{p\Gamma} u_\Gamma)$$

Beweis. Sei $v_\Gamma \neq 0$

$$\Rightarrow S v_\Gamma \cdot v_\Gamma = Av \cdot v > 0 \text{ mit } v_p = -A_{pp}^{-1} A_{p\Gamma} v_\Gamma$$

aus $A_{pp} u_p = b_p - A_{p\Gamma} u_\Gamma$ folgt

$$\begin{aligned}
A_{\Gamma\Gamma} u_\Gamma &= b_\Gamma - \sum A_{\Gamma p} u_p = b_\Gamma - \sum A_{\Gamma p} A_{pp}^{-1}(b_p - A_{p\Gamma} u_\Gamma) \\
\Rightarrow S u_\Gamma &= b_\Gamma - \sum A_{\Gamma_p} A_{pp}^{-1} b_p
\end{aligned}$$

Nun wähle

$$\begin{aligned}
&P = 2^S, \Omega^{0,1} = \Omega \\
&\overline{\Omega}^{1,1} \cup \overline{\Omega}^{1,2} = \overline{\Omega}
\end{aligned}$$

rekursiv

$$
\begin{aligned}
\overline{\Omega}^{s,q} &= \overline{\Omega}^{s+1,2q-1} \cup \overline{\Omega}^{s+1,2q}, q = 1, ..., 2^S \\
\Omega^p &= \Omega^{S,p}, p = 1, ..., 2^S = P.
\end{aligned}
$$

Nested Dissektiv: rekursive Anwendung von (3.2) für $s = S-1, S-2, ..., 0$ ($\rightarrow$ Maurer).

Beispiele für Partitionierungsverfahren

A) Rekursive Koordination - Bisektion (RCB)
Sei $z_\tau = \frac{1}{|\mathscr{N}_\tau|} \sum_{z \in \mathscr{N}_\tau} z \in \mathbb{R}^2$ Zellenmittelpunkt
Definiere $\tau < \tau' \leftrightarrow z_\tau[1] < z_{\tau'}[1]$ oder $(z_\tau[1] = z_{\tau'}[1]$ und $z_\tau[2] < z_\tau[2])$

s=0 Sortiere

$$
\mathscr{I}^{0,1} = \mathscr{I} = \{\tau_1, ..., \tau_M\}
$$

Zerlege

$$
\mathscr{I}^{0,1} = \mathscr{I}^{1,1} \dot{\cup} \mathscr{I}^{1,2} \text{ mit } \mathscr{I}^{1,1} = \{\tau_1, ..., \tau_{[\frac{M}{2}]}\}, \mathscr{I}^{1,2} = \{\tau_{[\frac{M}{2}]+1}, ..., \tau_M\}
$$

s=1 Nun sortiere $\mathscr{I}^{1,q}$ nach der zweiten Komponente
Zerlege $\mathscr{I}^{1,q} = \mathscr{I}^{1,2q-1} \dot{\cup} \mathscr{I}^{1,2q}, q = 1, ..., 2^s$

... Rekursiv mit abwechselnder Sortierung

Eigenschaften

- *schnell*
- *nicht invariant gegenüber Gebietstransformationen*
- *in ungünstigen Fällen wird das Interface I_Γ sehr groß.*

B) Rekursiv Trägheits- Bisektion (RIB)
Definiere diskreten Laplace- Operator zum Graphen

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\mathscr{I}} &= \{(\tau, \tau') : \overline{\tau} \cap \overline{\tau}' = f \text{ gemeinsame Seite}\} \subset \mathscr{I} \times \mathscr{I} \\
d_\tau &= |\{\tau' \neq \tau : (\tau, \tau') \in \Gamma_{\mathscr{I}}\}|
\end{aligned}
$$

$$
L[\tau, \tau'] = \begin{cases} d_\tau & \tau = \tau' \\ -1 & (\tau, \tau') \in \Gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

$M = |\mathscr{I}|, L \in \mathbb{R}^{M\times M}$ L symmetrisch, positiv definit

$$\begin{aligned} W &= \{w \in \mathbb{R}^M : w\cdot e = 0\} \\ e &= (1,...,1)^T \in \mathbb{R}^M \end{aligned}$$

Approximiere Eigenvektor $w \in W$ zum kleinsten Eigenwert $\mu > 0$ von $Lw = \mu w$. Definiere

$$\mathscr{I}^{1,1} = \{\tau : w[\tau] < 0\}, \mathscr{I}^{1,2} = \mathscr{I} \setminus \mathscr{I}^{1,1}.$$

Inverse Iteration zur Eigenwert- Berechnung:

I0) Wähle $w^0 \in \mathbb{R}^M \setminus \{0, e\}, k = 1, \varepsilon > 0$

I1) Approximiere $w^k = L^{-1}w^{k-1}$ durch einige cg-Schritte.

I2) berechne $w^k := \frac{1}{|w^k|}w^k, \mu_k = Lw^k \cdot w^k$

I3) falls $|\mu_k - \mu_{k-1}| < \varepsilon$ STOP

I4) gehe zu I1)

Vorteil: Invariant gegenüber Gebietstransformationen.

C) Space- filling Curve
Definiere eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \Omega$, die jede Zelle genau einmal durchläuft. Damit wird eine Nummerierung von $\mathscr{I} = \{\tau_1, ..., \tau_M\}$ definiert, setze

$$\mathscr{I}^q = \{\tau_{[(q-1)\frac{M}{p}]+1}, ..., \tau_{[q\frac{M}{p}]}\}$$

Hierarchische Konstruktion

- Erweiterbar auf unregelmäßige Gitter
- Abschätzung für $|I_\Gamma|$
- aufwendig und nicht optimal

Netzgenerierung

A) Strukturierte Gitter

A0) Wähle Box $\Omega \subset [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$.
Wähle $h > 0$ und Gitter $\Gamma_h = h\mathbb{Z}^2 \cap \Omega$.
Konstruiere regelmäßiges Vierecksgitter zu Γ_h.

A1) Wähle weitere Punkte auf dem Rand $\partial\Omega$ und konstruiere (unregelmäßige) Vierecke am Rand.

A2) Verschiebung einiger Knoten, um gleichmäßigere Vierecke zu erhalten (bzw. Einfügen von Dreiecken).

Vorteil: schnell
Nachteil: oft schlechte Qualität von Randzellen

B) Advancing Front

B0) Wähle (gleichmäßig) Punkte auf dem Rand.

B1) Konstruiere eine Elementschicht entlang dem Rand, so dass ein neuer innerer Rand entsteht. Wiederhole diesen Prozess so lange die inneren Ränder nicht zusammenstoßen.

B2) Verbinde die inneren Ränder durch Elemente.

B3) Glätten ...

Vorteil: Bessere Elemente am Rand
Nachteil: Kollisionskontrolle im Inneren aufwendig

C) Voronoi- Konstruktion

C0) Wähle gleichmäßige Punkte z_n auf dem Rand und im Inneren.

C1) Bilde Voronoi- Zellen

$$C_n = \{z \in \overline{\Omega} : |z - z_n| \leq |z - z_k| \ \forall k \neq n\} \text{ konvex!}$$

C2) Bilde Kanten:

$$\mathscr{E} = \{(z_n, z_k) : n \neq k, C_n \cap C_k \text{ gemeinsame Seite}\}$$

C3) Bilde zugehöriges Dreiecksnetz (Tetraedernetz).

<u>Vorteile:</u> Gute Netze
<u>Nachteile:</u> Keine Vierecke

Iterative Lösungsverfahren

Sei $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ein Vorkonditionierer zu $A = L + D + R$ mit $B \approx A^{-1}$
Z.B.

A) Jacobi, $B_{Jac} = D^{-1}$

B) Gauß- Seidel $B_{GS} = (L + D)^{-1}$

C) sym. Gauß- Seidel $c = B_{SGS} r$ mit

$$\begin{aligned} c_1 &= B_{GS} r \\ r_1 &= r - Ac_1 \\ c &= c_1 + B_{GS}^T r_1 \\ \Rightarrow B_{SGS} &= B_{GS} + B_{GS}^T - B_{GS}^T A B_{GS} \end{aligned}$$

D) Parallere Vorkonditionierer zu $A = \sum\limits_{p \in \mathscr{P}} A_p$
Wähle B^p zu $R_p A R_p^T$.
Definiere $c = B_{\mathscr{P}} r$ mit

$$\begin{aligned} c_p &= A_p^{-1} R_p r \\ c &= \sum R_p^T c_p \end{aligned}$$

E) Zweigitter- Verfahren mit $A = A_1, A_0 = R_0 A_1 R_0^T$ und Restriktionen $R_0 \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N_0}$ mit $N_0 < N$ und Prolerngation $R_0^T : \mathbb{R}^{N_0} \to \mathbb{R}^N$
Definiere $c = B_{ZW} r$ durch:
Glätten:

$$\begin{aligned} c_1 &= B_{GS} r \\ r_1 &= r - Ac_1 \\ r_0 &= R_0 r_1 \end{aligned}$$

Grobgitterkorrektur:

$$\begin{aligned} c_0 &= A_0^{-1} r_0 \\ c &= c_1 + R_0^T c_0 \end{aligned}$$

Symmetrische Variante: Nachglätten mit B_{GS}^T.

F) Mehrgitter: $A = A_L, A_{L-1} = R_{L-1} A_L R_{L-1}^T, \ldots$ rekursiv glätten.

LS0) Wähle

$$\begin{aligned} \varepsilon &> 0 \qquad \text{Abbruch} \\ \Theta &> 0 \qquad \text{Reduktionsfaktor} \end{aligned}$$

u_0 gegeben. Setze

$$k = 0, r^0 = b - Au^0, \varphi_0 = |r^0|$$

LS1) falls $\rho_k < max\{\Theta\rho_0, \varepsilon\}$ STOP

LS2)

$$\begin{aligned} c^{k-1} &= Br^k \\ r^{k+1} &= r^k - Ac^k \\ u^{k+1} &= u^k + c^k \end{aligned}$$

LS3) $k := k+1$, gehe zu LS1)

Es gilt

$$\begin{aligned} r^k &= (I - BA)^k r^0 \\ &\Rightarrow \rho_k \leq \|I_N - BA\|^k \rho_0 \\ &\Rightarrow \text{Falls } \|I_N - BA\| < 1, \text{ so konvergiert LS} \end{aligned}$$

Falls $I_N - BA$ normal und $|\cdot| = |\cdot|_2$, so gilt

$$\frac{\rho_k}{\rho_0} \to \rho(I_N - BA)$$

Krylov- Raum- Verfahren

Berechne ONB im Krylov- Raum $\mathcal{K}_k(BA, Br) = \{P(BA)Br : P \in P_{k-1}\}$. Wobei A, B symmetrisch, positiv definit sind.
Es gilt in der Energienorm $|u|_A = \sqrt{Au \cdot u}$:

CG0) Wähle $\varepsilon, \Theta > 0$, gegeben x^0
Setze

$$k = 0, r^0 = b - Ax^0, \varphi_0 = 1, p^0 = u^0$$

CG1) Falls $|r^k| < max\{\Theta |r^0|, \varepsilon\}$ STOP

CG2)

$$\begin{aligned}
c^k &= Br^k \\
\rho_1 &= c \cdot r \\
p^k &:= \frac{\rho_1}{\rho_0} p^k \\
p^{k+1} &:= p^k + c^k \\
\rho_0 &= \rho_1 \\
q^{k+1} &= Ap^{k+1} \\
\alpha &= \frac{\rho_0}{p^{k+1} \cdot q^{k+1}} \\
u^{k+1} &= u^k + \alpha_k p^{k+1} \\
r^{k+1} &= r^k - \alpha q^{k+1}
\end{aligned}$$

CG3) $k := k + 1$, gehe zu CG1)

Es gilt in der Energienorm $|u|_A = \sqrt{Au \cdot u}$:

$$|u^k - u^0|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\varkappa} - 1}{\sqrt{\varkappa} + 1} \right)^k |u^1 - u^0|_A \text{ mit } \varkappa = \varkappa(BA).$$

4 Gemischte Finite Elemente

Betrachte

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} q &= 0 \text{ in} \\
q &= K\nabla u \text{ in } \Omega \\
q\cdot n &= g_N \text{ auf } \Gamma_N \\
u &= u_D \text{ auf } \Gamma_D
\end{aligned}$$

wobei K symmetrisch positiv definit ist.

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div} q\phi dx = 0 \qquad \text{für alle Testfunktionen } \phi : \Omega \to \mathbb{R}.$$

$$\int_\Omega K^{-1} q\psi dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \psi dx = -\int_\Omega u \operatorname{div} \psi dx + \int_{\Gamma_D} u_D \psi \cdot n da$$

für alle Testfunktionen $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit $\psi \cdot n = 0$ auf Γ_N.

$\Rightarrow$ Sattelpunktproblem:
Bestimme (q,u) mit $q\cdot n = g_N$ auf Γ_N und

$$\begin{aligned}
\int_\Omega K^{-1} q\cdot\psi dx + \int_\Omega u \operatorname{div}\psi dx &= \int_{\Gamma_D} u_D \psi\cdot n da \\
\int_\Omega \operatorname{div} q\phi dx &= 0 \ \forall(\psi,\phi) \text{ mit } \psi\cdot n = 0 \text{ auf } \Gamma_N.
\end{aligned}$$

Sei $\mathscr{T}$ eine Triangulierung und $\mathscr{F}$ die Menge aller Seiten $\partial\tau\cap\partial\tau'$ oder $\partial\tau\cap\partial\Omega$.
Wähle FE-Räume W_h, Q_h und

$$W_h(g) = \{\psi_h \in W_h : \int_f \psi_h da = \int_f g da\}.$$

Bestimme $(q_h, u_h) \in W_h(g_N) \times Q_h$ mit

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega K^{-1} q_h \cdot \psi_h dx + \int_\Omega u_h \operatorname{div}\psi_h dx = \int_{\Gamma_D} u_D \psi_h \cdot n da \\
&\int_\Omega \operatorname{div} q_h \phi_h dx = 0 \quad \forall(\psi_h,\phi_h) \in W_h(0)\times Q_h.
\end{aligned}$$

Zu $\hat{\tau} = conv\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ definiere $\hat{W} = span\{\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\}$ mit

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_0(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 - 1 \end{pmatrix} \\
\hat{\psi}_1(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\
\hat{\psi}_2(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi_1 - 1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zu $\hat{\tau} = conv\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{0}{1}\}$ definiere $\hat{W} = span\{\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3\}$ mit

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_0(\xi) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 - 1 \end{pmatrix} \\
\hat{\psi}_1(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\hat{\psi}_2(\xi) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\
\hat{\psi}_3(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zu jeder Seite $\hat{f} \subset \partial\hat{\tau}$ definiere $\Pi_{\hat{f}}(\hat{\psi}) = \int\limits_{\hat{f}} \hat{\psi} \cdot \hat{n} d\hat{a}$.

Dann gilt

$$\Pi_{\hat{f}_i}(\hat{\psi}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\varphi_\tau : \hat{\tau} \to \overline{\tau},\ F_\tau = D_{\varphi_\tau},\ J_\tau = det F_\tau$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int\limits_{\partial\hat{\tau}} \hat{\psi} \cdot \hat{n} d\hat{a} &= \int\limits_{\hat{\tau}} \hat{\operatorname{div}} \hat{\psi} d\hat{x} = \int\limits_{\tau} tr((\hat{D}\hat{\psi}) \circ \varphi_\tau^{-1}) J_\tau^{-1} dx \\
&= \int\limits_{\tau} tr(F_\tau D(\hat{\psi} \circ \varphi_\tau^{-1})) J_\tau^{-1} dx = \int\limits_{\tau} J_\tau^{-1} (F_\tau \hat{\psi} \cdot \varphi^{-1}) \cdot n dx
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
D(\hat{\psi} \circ \varphi_\tau^{-1}) &= (\hat{D}\hat{\psi}) \circ \varphi_\tau^{-1} F_\tau^{-1} \\
n &= \frac{1}{|F^{-T}\hat{n}|} F^{-T} \hat{n} \\
\Rightarrow W_h &= \{\psi : \Omega \to \mathbb{R}^2 : J_\tau^{-1} F_\tau \hat{\psi} \circ \varphi_\tau^{-1} = \psi|_\tau, \hat{\psi} \in \hat{W}\}.
\end{aligned}$$

Basis- Wahl: Sei $f = conv\{z_0, z_1\}$ mit $z_0 < z_1$.
Definiere $n_f = \frac{1}{|z_1 - z_0|} \binom{z_1[2] - z_0[2]}{z_0[1] - z_1[1]}$ und $s_{\tau,f} = sgn(n_f \cdot (F_\tau^{-1} \hat{n}_\tau))$.

$$\Rightarrow W_h = span\{\psi_f : f \in \mathscr{F}\} \text{ mit } \psi_f(x) = s_{\tau,f} J_\tau F_\tau \hat{\psi}_\tau(\xi)$$

für $\varphi_\tau(\xi) = x, \hat{f} = \varphi_\tau(f)$.

Hybride Finite Elemente

Definiere

$$\begin{aligned} W_\tau &= \{J_\tau^{-1} F_\tau \hat{\phi} \circ \varphi_\tau^{-1} : \phi \in \hat{W}_\tau\} \\ W_J &= \prod W_\tau. \end{aligned}$$

Dann gilt für $\varphi_\tau = (\varphi_\tau) \in W_J$

$$\psi \in W_h \Leftrightarrow (\varphi_\tau - \varphi_{\tau'}) \cdot n_f = 0 \; \forall \overline{f} = \overline{\tau} \cap \overline{\tau'}.$$

Minimierung mit Nebenbedingung $Q_h = \prod\limits_\tau P_0, M_h = \prod\limits_f P_0$.

(4.1) Satz
Für $q_{\mathscr{I}} \in W_J$ ist äquivalent

$$q_{\mathscr{I}} = q_h \in W_h \; mit \int\limits_f q_h \cdot n da = \int\limits_f g_N da, f \in \Gamma_N.$$

a) *Es ex. $u_h \in Q_h$ mit*

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega K^{-1} q_h \cdot \psi_h dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div} \psi_h dx = \int\limits_{\Gamma_D} u_D \psi_h \cdot n da \\ &\int\limits_\Omega \operatorname{div} q_h \phi_h dx = 0 \quad \forall (\psi_h, \phi_h) \in W_h(0) \times Q_h \end{aligned}$$

b) *$q_{\mathscr{I}} = q_h \in W_h$ minimiert*

$$E(\psi) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega K^{-1} \psi \cdot \psi dx - \int\limits_{\Gamma_D} u_D \psi \cdot n da$$

unter den Nebenbedingungen: $\int\limits_\tau \operatorname{div} \psi dx = 0 \; \forall \tau \in \mathscr{I}$.

c) $q_h \in W_{\mathscr{I}}$ *minimiert* $E(\cdot)$ *unter den Nebenbedienungen b) und*

$$\int_f (q_h|_\tau - q_h|_{\tau'}) \cdot n_f da = 0, \quad \forall f \subset \Omega$$

$$\int_f q_h \cdot n da = \int_f g_N da, \quad \forall f \subset \Gamma_N.$$

d) Es ex. $u_h \in Q_h$ *und* $\lambda_h \in M_h$ *mit* $\int_f \lambda_h da = \int_f u_D da, f \subset \Gamma_N$ *und*

$$\int_\tau K^{-1} q_\tau \cdot \psi_\tau dx + \int_\tau u_\tau \operatorname{div} \psi_\tau dx - \int_{\partial\tau} \lambda_h \psi_\tau \cdot n_\tau da = 0$$

$$\int_\tau \operatorname{div} q_\tau q_\tau dx = 0 \; \forall (\psi_\tau, q_\tau) \in W_\tau \times Q_\tau \; \forall \tau \in \mathscr{I}$$

$$\sum_\tau \int_{\partial\tau} q_\tau \cdot n_\tau \mu_h da = \int_{\Gamma_N} g_N \mu_h da \quad \forall \mu_h \in W_h \;\; \text{mit} \; \int_f \mu_h da = 0 \, \text{für} \; f \subset \Gamma_D.$$

Beweis. a) $\Leftrightarrow$ b):
$\mathscr{E}(\psi_h) = \underline{\psi^T} \underline{A} \underline{\psi} - \underline{b} \underline{\psi}$ mit

$$\begin{aligned} \psi_k &= \sum \underline{\psi}_f \psi_f \\ \underline{A}[f, f'] &= \int_\Omega K^{-1} \psi_f \cdot \psi_{f'} dx \\ \underline{b}[f] &= \int_{\Gamma_D} u_D \psi_f \cdot n da \text{ uniform konvex} \end{aligned}$$

Definiere Lagrange- Funktional

$$L(\psi, \phi) = \mathscr{E}(\psi) + \int_\Omega \operatorname{div} \psi u dx.$$

Dann gilt: $\mathscr{E}(q_h) \leq \mathscr{E}(\psi_h) \; \forall \psi_h \in W_h^0(g_N)$, wobei $W_h^0(g_N) = \{\psi_h \in W_h(\psi_h) : \int_\tau \operatorname{div} \psi_h dx = ? \; \forall \tau \in \mathscr{I}\}$.

$\Leftrightarrow$ ex. Lagrange- Multiplikator $u_h \in Q_h$:

$$L(q_h, \phi_h) \leq L(q_h, u_h) \leq L(\psi_h, u_h) \; \forall (\psi_h, u_h) \in W_h(0) \times Q_h.$$

$\Leftrightarrow$ $L(q_h, u_h + \phi_h) \leq L(q_h, u_h) \leq L(q_h + \psi_h, u_h) \; \forall (\psi_h, u_h) \in W_h(0) \times Q_h$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \operatorname{div} q_h \phi_h dx = 0 \text{ und } \int K^{-1} q_h \cdot \psi_h dx = \int_{\Gamma_D} u_D \cdot \psi_h \cdot n da$$

b) $\Leftrightarrow$ c)
$\psi_{\mathscr{I}} \cdot n_f \in P_0 \; \forall f$, also

$$\begin{aligned} \psi_{\mathscr{I}} \in W_h \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathscr{I}} \cdot n_f = \psi_{\tau'} \cdot n_f \text{ für } \overline{f} = \overline{\tau} \cap \overline{\tau}' \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_\tau \int_{\partial\tau} \psi_\tau \cdot n_\tau \mu_h da = \int_{\partial\Omega} \psi_\tau \cdot n \mu_h da \; \forall \mu_h \in M_h = \Pi M_f \end{aligned}$$

c) $\Leftrightarrow$ d)

$$\begin{aligned} M_h(u_D) \quad &= \quad \{\lambda_h \in M_h : \int_f \lambda_h da = \int_f u_D da \; \forall f \subset \Gamma_D\} \\ \mathscr{E}(q_{\mathscr{I}}) \quad &\leq \quad \mathscr{E}(\psi_{\mathscr{I}}) \; \forall \psi_\tau \in W_h^0(g_N) \\ &\Leftrightarrow \quad (q_{\mathscr{I}}, u_h, \lambda_h) \in w_\tau \times Q_h \times M_h(u_D) \end{aligned}$$

Sattelpunkt von:

$$\begin{aligned} L(\Psi, \phi) &= \mathscr{E}(\psi) + \int_\Omega \operatorname{div} \psi \phi dx - \sum_{f=\tau\cap\tau'} \int (\psi_\tau - \psi_{\tau'}) \cdot n_f u da - \int_{\Gamma_N} (\psi \cdot n - g_N) \mu da \\ &= \sum_\tau \int_\tau K^{-1} \psi_\tau \cdot \psi_\tau dx + \int_\tau \operatorname{div} \psi_\tau \phi_\tau dx - \int_{\partial\tau} \psi_\tau \cdot n_\tau \mu da + \int_{\partial\tau\cap\Gamma_N} g_N \mu da, \end{aligned}$$

□

d.h.

$$\begin{gathered} L(q_{\mathscr{I}}, u_h + \phi_h, \lambda_h + \mu_h) \leq L(q_{\mathscr{I}}, u_h, \lambda_h) \leq L(q_{\mathscr{I}} + \psi_{\mathscr{I}}, u_h, \lambda_h) \\ \forall (\psi_{\mathscr{I}}, u_h, \mu_h) \in W_{\mathscr{I}} \times Q_h \times M_h(0) \Leftrightarrow \text{ d)} \end{gathered}$$

Algebraische Formulierung

$$\begin{aligned}
\underline{A}_\tau &= (\int\limits_\tau K^{-1}\psi_{\tau,i}\cdot\psi_{\tau,j}dx)_{i,j} \in \mathbb{R}^{N_\tau\times N_\tau}\\
\underline{b}_\tau &= (\int\limits_\tau div\psi_{\tau,i}dx)_i \in \mathbb{R}^{N_\tau}
\end{aligned}$$

$$\underline{g} = (\int\limits_{\Gamma_N} g_N\Lambda_f) \in \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$$

$$\underline{R}_\tau = (\int\limits_{\partial\tau} \psi_{\tau,i}\cdot n\Lambda_f da)_{i,f} \in \mathbb{R}^{N_\tau\times\mathscr{F}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad &(1) \quad \underline{A}_\tau\underline{q}_\tau + \underline{b}_\tau\underline{u}_\tau = \underline{R}_\tau\underline{\Lambda}, q_\tau = \sum \underline{q}_{\tau,i}\psi_{\tau,i}\\
&(2) \quad \underline{b}_\tau^T\underline{q}_\tau = 0, u_\tau \equiv \underline{u}_\tau \text{ in } \tau\\
&(3) \quad \underline{R}_\tau^T\underline{q}_\tau = \underline{g} + \sum_\tau \underline{R}_\tau^T\underline{\Lambda}_D
\end{aligned}$$

(4.2) Lemma
Sei $\Gamma_D \neq \emptyset$. Dann ist das LGS eindeutig lösbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
\underline{C\lambda} &\equiv \underline{g} + \underline{C\lambda_D} \; mit \; \underline{C} = \sum_\tau \underline{R}_\tau^T(\underline{A}_\tau^{-1} - \underline{A}_\tau^{-1}\underline{b}_\tau\underline{s}_\tau^{-1}\underline{b}_\tau^T\underline{A}^{-1})\underline{R}_\tau\\
\underline{u}_\tau &= s_\tau^{-1}b_\tau^T\underline{A}_\tau^{-1}\underline{R}_\tau\underline{\lambda}\\
\underline{q}_\tau &= \underline{A}_\tau^{-1}(\underline{R}_\tau\underline{\lambda} - \underline{b}_\tau\underline{u}_\tau)\\
\underline{s}_\tau &= \underline{b}^T\underline{A}_\tau^{-1}b_\tau
\end{aligned}$$

$$\underline{\lambda}_D[f] = \begin{cases} \int\limits_f u_D da & f \subset \Gamma_D \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Beweis. $\underline{A}_\tau$ ist symmetrisch positiv definit

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \underline{q}_\tau = \underline{A}_\tau^{-1}(\underline{R}_\tau\underline{\lambda} - \underline{b}_\tau u_\tau)\\
&\Rightarrow \quad 0 = \underline{b}_\tau^T\underline{q}_\tau = \underline{b}_\tau^T(\underline{A}_\tau^{-1}\underline{R}_\tau\underline{\lambda} - \underline{b}_\tau\underline{u}_\tau) = \underline{b}_\tau^T\underline{A}_\tau^{-1}\underline{R}_\tau\underline{\lambda} - \underline{s}_\tau\underline{u}_\tau
\end{aligned}$$

Einsetzen in (3) ergibt LGS:
Sei $\underline{C\lambda} = 0$ für $\lambda[f] = 0, f \subset \Gamma_D$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{A}\underline{q} + \underline{B}\underline{u} &= 0 \qquad \underline{A}[f,f'] = \int\limits_\Omega K^{-1}\psi_f\cdot\psi_{f'}dx\\
\underline{B}^T\underline{u} &= 0 \qquad \underline{B}[f,\tau] = \int\limits_\tau \operatorname{div}\psi_f dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 0 \quad &= \quad \underline{u}^T \underline{B}\underline{A}^{-1}\underline{B}\underline{u} = \underline{q}^T \cdot \underline{B}\underline{u} = \sup_{\underline{\psi}\neq 0} \frac{\underline{\psi}^T \underline{B}\underline{u}}{\underline{\psi}^T \underline{A}\underline{\psi}} \\
&\Rightarrow \quad \underline{u} \in \ker \underline{B} \\
&\Rightarrow \quad \underline{u} \equiv \text{ const} \\
&\Rightarrow \quad \underline{u} = 0 \text{ da } \Gamma_D \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

Details nächstes Semester! □

Fehlerabschätzung

Betrachte das System erster Ordnung

$$
\begin{aligned}
L(q,u) \quad &:= \quad \begin{pmatrix} q - K\nabla u \\ \operatorname{div} q \end{pmatrix} \\
((q,u),(\psi,\phi))_H \quad &= \quad \int_\Omega K^{-1} q \cdot \psi dx + \int_\Omega u\psi dx
\end{aligned}
$$

und die Gleichung

$$
(L(q,u),(\psi,\phi))_H = \int_{\Gamma_D} u_D \psi \cdot n da + \int_{\Gamma_N} g_N \phi da \qquad \forall (\psi,\phi)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{mit } \psi \cdot n \quad &= \quad 0 \text{ auf } \Gamma_N \\
\phi \quad &= \quad 0 \text{ auf } \Gamma_D
\end{aligned}
$$

Lösbarkeit?
Definiere

$$
\|(\psi,\phi)\|_L = \sqrt{\|(\psi,\phi)\|_H + \|L(\psi,\phi)\|_H} \qquad \text{Graphennorm.}
$$

(4.3) Lemma
Für $(q_h,u_h) \in W_h \times V_h$ und $(\psi_h,\phi_h) \in W_h(0) \times V_h(0)$ gilt

$$
(L(q_h,u_h),(\psi_h,\phi_h))_H = ((q_h,u_h),L(\psi_h,\phi_h))_H
$$

Beweis.

$$
\nabla u_h, \nabla \phi_h, \operatorname{div} q_h, \operatorname{div} \psi_h \in L_2(\Omega_h), \Omega_h = \bigcup \tau, \Omega \setminus \Omega_h \text{ Nullmenge}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & (L(q_h,u_h),(\psi_h,\phi_h))_H = \sum_\tau \int_\tau (K^{-1} q_h \cdot \psi_h - \nabla u_h \cdot \psi_h + \operatorname{div} q_h \phi_h) dx \\
= \quad & \sum_\tau \int_\tau (K^{-1} q_h \cdot \psi_h + u_h \operatorname{div} \psi_h - q_h \cdot \nabla \phi_h) dx + \int_{\partial\tau} (q_h \cdot n \phi_h - \psi_h \cdot n u_n) da \\
= \quad & ((q_h,u_h),L(\psi_h,\phi_h))_H
\end{aligned}
$$

Bemerkung

$L(q_h, u_h) \in L_2(\Omega)^{D+1}$ ist die 'schwache Ableitung' von (q_h, u_h).

Definition

Sei $W_0 \times V_0 \subset H$ genau der Hilbertraum bezüglich $\|\cdot\|$, der $W_h(0) \times V_h(0)$ für alle Triangulierung von Ω enthält.

(4.4) Satz
Sei

$$\|\phi\|_\Omega^2 \le C_p (K\nabla\phi, \nabla\phi)_\Omega \quad \forall \phi \in V_0 \; mit \; C_p > 0,$$

wobei $\|\phi\|_\Omega^2 = (\phi, \phi)_\Omega = \int\limits_\Omega |\phi|^2 dx$. *Dann gilt*

$$\|(\psi, \phi)\|_H \le C_L \|L(\psi, \phi)\|_H \quad \forall (\psi, \phi) \in W_0 \times V_0 \;\; mit \;\; C_L = 1 + 2C_p(1 + c_p).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(K\nabla\phi, \nabla\phi)_\Omega &= -(\psi - K\nabla\phi, \nabla\phi)_\Omega + (\psi, \nabla\phi)_\Omega \\
&= -(L(\psi, \phi), (K\nabla\phi, \phi))_H \\
&\le \|L(\psi, \phi)\|_H [(1 + C_p)(K\nabla\phi, \nabla\phi)_\Omega]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|(\psi, \phi)\|_H^2 &= (K^{-1}\psi - \nabla\phi, \psi)_\Omega + (\nabla\phi, \psi)_\Omega + (\phi, \phi)_\Omega \\
&= (L(\psi, \phi), (\psi, -\phi))_H + C_p (K\nabla\phi, \nabla\phi)_\Omega \\
&\le \|L(\psi, \phi)\|_H \|(\psi, \phi)\|_H + C_p(1 + C_p)\|L(\psi, \phi)\|_H^2 \\
&\le \frac{1}{2}\|L(\psi, \phi)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|(\psi, \phi)\|_H^2
\end{aligned}$$

(4.5) Satz
Sei

$$\begin{aligned}
u_h \in V_h(u_D) \quad & mit \quad \int\limits_\Omega K\nabla u_h \cdot \nabla\phi_h dx = \int\limits_{\Gamma_N} g_N \phi_h da \; \forall \phi_h \in V_h(0) \\
q_h \in W_h(g_N) \quad & mit \quad \int\limits_\Omega K^{-1} q_h \cdot \psi_h dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div}\psi_h dx = 0, \int\limits_\Omega \operatorname{div} q_h \phi_h dx = 0 \\
& \qquad \forall (\psi_h, \phi_h) \in W_h(0) \times Q_h
\end{aligned}$$

Sei $u_D = u_H|_{\Gamma_D}, g_N = q_h \cdot n|_{\Gamma_N}$.
Sei $(q, u) \in (q_h, u_h) + W_0 \times V_0$ Lösung von

$$(L(q, u), (\psi, \phi))_H = \int\limits_{\Gamma_N} g_N \phi da + \int\limits_{\Gamma_D} u_D \phi \cdot n da.$$

Dann gilt

$$\|q - q_h\|_{K^{-1}} \le \|q_h - K\nabla u_h\|_{K^{-1}}.$$

5 Finite Volumen für die lineare Transportgleichung

Gegeben: $\Omega \subset \mathbb{R}^D, \Gamma_{in} = \partial\Omega$, Fluss $q\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$
Gesucht: Dichteverteilung $\rho : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ einer transportierten Substanz zu gegebenem Einfluss $\rho : \Gamma_{in} \times [0,T] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wobei $\Gamma_{in} = \{z \in \partial\Omega : q(z) \cdot n(z) \leq 0\}$.
Bilanzgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_Y \rho dx + \int\limits_{\partial Y} \rho q \cdot n da = 0 \; \forall Y \subset \Omega$$
$$\Rightarrow \partial_t \rho + \operatorname{div} \rho q = 0 \text{ in } \Omega \times [0,T]$$

Randbedingung: $\rho(x,t) = \rho_{in}(x,t)$ auf $\Gamma_{in} \times [0,T]$.
Anfangsbedingung: $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ in Ω.

Schwache Lösungen:
Sei

$$\rho(t)(x) = \rho(x,t), \phi\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ Testfunktion mit } \phi = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ und } \phi(T) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho q) \phi dx dt \\ &= \int\limits_\Omega \rho_0 \phi(0) dx - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\rho \partial_t \phi + \rho q \cdot \nabla \phi) dx dt \qquad (*) \end{aligned}$$

(5.1) Definition
ρ heißt 'schwache Lösung' der linearen Transportgleichung, wenn $(*)$ für alle ϕ erfüllt ist.

Beispiele

Sei $\Omega = \mathbb{R}^D, q \in \mathbb{R}^D$ fest, $n \in \mathbb{R}^D$ mit $|n| = 1$.

A) Wanderwellen
Sei $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Amplitudenprofil

definiere $\quad \rho(x,t) = a((tq - x) \cdot n)$
$$\Rightarrow \partial_t \rho + \operatorname{div} \rho q = q \cdot n a' + q \cdot \nabla \rho = 0$$

B) Das Riemann- Problem
Sei

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_- & \Omega_- = \{x : x \cdot n < 0\} \\ \rho_+ & \Omega_+ = \{x : x \cdot n > 0\} \end{cases} \quad \Rightarrow \rho(x,t) = \begin{cases} \rho_- & Q_- = \{(x,t) : (x - tq) \cdot n < 0\} \\ \rho_+ & Q_+ = \{(x,t) : (x - tq) \cdot n > 0\} \end{cases}$$

ist schwache Lösung: $\phi \in C_0^\infty([-1,T]\times\mathbb{R}^D)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int\limits_{\Omega} \rho_0\phi(0)dx - \int\limits_{\Omega_-} \begin{pmatrix}\rho\\ \rho q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_t\\ \nabla\end{pmatrix}\phi dxdt - \int\limits_{Q_+} \begin{pmatrix}\rho\\ \rho q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_t\\ \nabla\end{pmatrix}\phi dxdt \\ = \quad & \int\limits_{\partial Q_-\cap\partial Q_+} \phi\begin{pmatrix}\rho_-\\ \rho_- q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-q\cdot n\\ n\end{pmatrix}da + \int\limits_{\partial Q_-\cap\partial Q_+} \phi\begin{pmatrix}\rho_+\\ \rho_+ q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}q\cdot n\\ -n\end{pmatrix}da = 0 \end{aligned}$$

c) Charakteristiken $\mathscr{X}(t) = tq + x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \partial_t\rho(\mathscr{X}(t),t) = \partial_t\rho(\mathscr{X}(t),t) + q\cdot\nabla\rho(\mathscr{X}(t),t) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \partial_t\rho \equiv 0 \text{ entlang von } \mathscr{X} \\ \Rightarrow \quad & \rho(\mathscr{X}(t)) \equiv \rho_0(x,0) \text{ konstant} \end{aligned}$$

Anwendung

$$\rho(x_1,x_2,t) = \begin{cases} \rho_0(x_1,1,t-(1-x_2)) & t \geq 1-x_2 \\ 0 & t < 1-x_2 \end{cases}$$

Diskretisierung im Raum

Sei $\overline{\Omega} = \bigcup \overline{\tau}$ eine Triangulierung und $\phi\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ eine Testfunktion

$$\Rightarrow \int\limits_{\tau} \partial_t\rho\phi dx = -\int\limits_{\tau} \operatorname{div}(\rho q)\phi dx = \int\limits_{\tau} \rho q\cdot\nabla\phi dx - \sum_{f\subset\partial\tau}\int\limits_{f} \rho q\cdot n\phi da$$

Finite Volumen

$\rho_h\colon [0,T] \to Q_h = \prod\limits_{\tau\in\mathscr{I}} \mathbb{P}_0$ mit

$$\int\limits_{\Omega} \partial_t\rho_h\phi_h dx = \sum_{\tau}\sum_{f\subset\partial\tau}\int\limits_{f} \mathscr{F}^*_{\tau,f}(\rho_h)\cdot n_\tau\phi_h da \qquad \forall\phi_h \in Q_h$$

mit dem 'numerischen Fluss'

$$\mathscr{F}^*_{\tau,f}(\rho_h) = \begin{cases} \rho_\tau q & q\cdot n_\tau > 0 \\ \rho_{in} q & q\cdot n_\tau < 0 \text{ und } f \subset \Gamma_{in} \\ \rho_{\tau'} q & q\cdot n_\tau < 0 \text{ und } f = \partial\tau\cap\partial\tau', \tau \neq \tau' \end{cases}$$

Sei

$$\begin{aligned} N &= |\mathscr{I}| \\ \underline{\rho} &= (\rho_\tau)_{\tau\in\mathscr{I}} \in \mathbb{R}^N \\ \underline{M}_h &= \operatorname{diag}\,(\int\limits_{\tau} d\tau) \in \mathbb{R}^{N\times N} \qquad \text{Massenmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{A}_h[\tau,\tau'] = \begin{cases} \sum\limits_{f\subset\partial\Gamma_{in}} \int\limits_f \mathscr{F}^*_{\tau,f}(\phi_\tau)\cdot n_\tau da & \tau = \tau' \\ \int\limits_{\partial\tau\cap\partial\tau'} \mathscr{F}^*_{\tau,f}(\phi_{\tau'})\cdot n_\tau da & \tau \neq \tau' \end{cases}$$

$$\phi_\tau(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathscr{I} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{b}_h[\tau] = \sum_{f\subset\partial\tau}\int_f \rho_{in} q\cdot n_\tau da$$

Diskretisierung in der Zeit

Die ODE

$$\underline{M}_h\underline{\dot\rho} = \underline{A}_h\underline{\rho} + \underline{b}_h =: F(\underline{\rho})$$

wird durch

$$\underline{\rho}(t) = \exp\,(t\underline{M}_h^{-1}\underline{A}_h) - A_h^{-1}b_h$$

gelöst.

A) Explizites Euler - Verfahren

$$\begin{aligned} & \exp(\xi)\approx 1+\xi \\ \Rightarrow\quad & \underline{\rho}^n = \underline{\rho}^{n-1} + \Delta t F(\underline{\rho}^{n-1}) = \underline{\rho}^{n-1} + \Delta t M^{-1}(\underline{A}\underline{\rho}^{n-1} + \underline{b}^{n-1}) \end{aligned}$$

Beobachtung:

$$\text{Spektralradius } \rho(\Delta t\underline{M}^{-1}\underline{A}) = O(\Delta t h^{-2} h) = O(\frac{\Delta t}{h})$$

d.h. $(\underline{\rho}^n)$ beschränkt

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad & \rho(I_N + \Delta t\underline{M}^{-1}\underline{A}) < 1 \\ \Rightarrow\quad & O(\frac{\Delta t}{h}) = 1,\ \text{d.h. } \Delta t < Ch\ \ \text{(CFL-Bed.)} \end{aligned}$$

Bemerkung

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\|\rho(t)\|^2_\Omega$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) = (\dot{\rho},\rho)_\Omega &= -(\operatorname{div}(q\rho),\rho)_\Omega = -\int\limits_\Omega q\cdot\nabla\rho\rho dx \\ &= \int\limits_\Omega \rho q\cdot\nabla\rho dx - \int\limits_{\partial\Omega} q\cdot n\rho^2 da \\ &= -2\int\limits_{\partial\Omega} q\cdot n\rho^2 da \leq -2\int\limits_{\Gamma_{in}} q\cdot n\rho_{in}^2 da\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}(0) + \int\limits_0^t \dot{\mathscr{E}}(s)ds \leq \mathscr{E}(0) + 2\int\limits_0^t q\cdot n\rho_{in}^2 da \ \ \textit{beschränkt.}$$

B) Klassisches Runge - Kutta - Verfahren

$$\begin{aligned}\rho^n &= \rho^{n-1} + \frac{\Delta t}{6}(R_1+R_2+R_3+R_4) \\ R_1 &= M^{-1}(A_\rho^{n-1}+b^{n-1}) \\ R_2 &= R_1 + \frac{\Delta t}{2}(M^{-1}AR_1+b^{n-2}) \\ R_3 &= R_2 + \frac{\Delta t}{2}M^{-1}(AR_2+b^{n-2}) \\ R_4 &= R_3 + \Delta t M^{-1}(AR_3+b^n)\end{aligned}$$

C) Implizites Euler - Verfahren

$$\begin{aligned}&\rho^n = \rho^{n-1} + \Delta t F(\rho^n) = \rho^{n-1} + \Delta t M^{-1}(A\rho^n + b^n) \\ \Rightarrow\ &\rho^n = (I_N - \Delta t M^{-1}A)^{-1}(\rho^{n-1} + \Delta t M^{-1}b^n)\end{aligned}$$

D) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{aligned}\rho^n &= \rho^{n-1} + \Delta t F(\frac{1}{2}(\rho^n+\rho^{n-1})) \\ &= \rho^{n-1} + \Delta t\frac{1}{2}M^{-1}(A\rho^{n-1}+A\rho^n+2b^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \rho^n &= (I_N - \frac{\Delta t}{2}M^{-1}A)^{-1}(\rho^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}M^{-1}A\rho^{n-1} + \Delta t M^{-1}b^n) \\ &= \rho^n + \Delta t(M - \frac{\Delta t}{2}A)^{-1}(A\rho^{n-1}+b^n)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ keine CFL- Bed.
$\Rightarrow$ reversibel!

E) Krylovraum - Verfahren (für $b^n = 0$)
Approximiere $\exp(\Delta t M^{-1}A)\rho_{in}^{n-1}$

$$\mathscr{K}_m = \{P(M^{-1}A)\rho^{n-1} : P \in \P_{m-1}\}$$

berechne ONB (bzgl. $(u,v)_M = u^T M v$),$(v_1,\ldots,v_m) = V_m$ und die 'Galersin - Projektion' $A_m = V_m^T A V_m$.
Dann gilt

$$\exp(\Delta t A)u \approx V_m \exp(\Delta t A_m) V^T u.$$

Bemerkung
Die CFL - Bed. erfordert wieder $m = O(\frac{\Delta t}{h})$

Discontinuous- Galerkin- Verfahren

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div} \rho q &= 0 && \text{in } \Omega \times [0,T] \\ \rho(0) &= \rho_0 && \text{in } \Omega \\ \rho &= \rho_{in} && \text{auf } \Gamma_{in} \times [0,T] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \partial_t \rho \phi dx = \int_\Omega \rho q \cdot \nabla \phi dx + \sum_\tau \sum_{f \subset \partial \tau} \int_f \mathscr{F}_{\tau,f}(\rho) n_\tau \phi da$$

$$\text{mit } \mathscr{F}_{\tau,f}(\rho) = \begin{cases} \rho_{in} q & f \subset \Gamma_{in} \\ \rho q & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall \phi$$

$$\rho_h \colon [0,T] \to \prod_\tau \mathbb{P}_{P_\tau} \text{ mit } p_\tau \in \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_t \rho_h \phi_h dx &= \sum_\tau \int \rho_h q \cdot \nabla \phi_h dx + \sum_{f \subset \partial \tau} \int_f \mathscr{F}^*_\tau(\rho_h) \cdot n_\tau \phi_h da \\ &= \sum_\tau - \int \operatorname{div}(\rho_h q) \phi_h dx + \sum_{f \subset \partial \tau} \int_f (\mathscr{F}^*_{\tau,f}(\rho_h) - \mathscr{F}_{\tau,f}(\rho_h)) \cdot n_\tau \phi_h da \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathscr{F}^*_{\tau,f}(\rho_h) - \mathscr{F}_{\tau,f}(\rho_h) = \begin{cases} [\rho_h]_{\tau,f} q & q \cdot n_\tau < 0, f = \overline{\tau} \cap \overline{\tau'} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } [\rho_h]_{\tau,f} = \begin{cases} (q_\tau - q_{\tau'})q & f = \partial \tau \cap \partial \tau' \\ 2\rho_{in} q & f \subset \Gamma_{in} \end{cases}$$

Betrachte die diskreten Operatoren

$$
\begin{aligned}
M_h \quad &: \quad Q_h \to Q_h \text{ mit } (M_h\phi_h, \tilde{\phi}_h)_\Omega = \int_\Omega \phi_h \cdot \tilde{\phi}_h dx \text{ symmetrisch positiv definit} \\
A_h \quad &: \quad Q_h \to Q_h \text{ mit} \\
&\qquad (A_h\phi_h, \tilde{\phi}_h)_\Omega = \sum_\tau (\mathrm{div}(\rho_h q), \phi_h)_\tau + \sum_{f \subset \partial\tau} \int_f (\mathscr{F}^*_{\tau,f}(\phi_h) - \mathscr{F}_{\tau,f}(\phi_h)) \cdot n_\tau \tilde{\phi}_h da
\end{aligned}
$$