1 Potentialströmungen

Eine Potentialströmung in $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D = 2,3$, wird durch den (hydrostatischen) Druck

$$p\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

den Fluss

$$q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

und dem Materialgesetz (Darcy)

$$q = -K(\nabla p - g)$$

beschrieben. Dabei ist K der Permeabilitätstensor und $g = \nabla G$ der Gravitationsvektor.
Im Folgenden verwenden wir die Hilfsgröße $u = -p + G$, d.h., $q = -K(\nabla p - g) = K\nabla u$.

Auf dem Rand $\partial\Omega = \Gamma_{\mathrm{D}} \cup \Gamma_{\mathrm{N}}$ werden Randdaten

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{D}} \quad &: \quad \Gamma_{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ g_{\mathrm{N}} \quad &: \quad \Gamma_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

für die Randbedingungen $u = u_{\mathrm{D}}$ auf Γ_{D} und $q \cdot n = g_{\mathrm{N}}$ auf Γ_{N} vorgegeben.

Aus der Bilanzgleichung

$$\int_{\partial Y} q \cdot n \,\mathrm{d}a = 0 \quad \text{für jedes Teilvolumen } Y \subset \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{div} q = 0$$

ergibt sich für jede Testfunktion $\phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi = 0$ auf Γ_{D} die Variationsgleichung für u

$$\int_{\Omega} K\nabla u \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g_{\mathrm{N}}\phi \,\mathrm{d}a\,.$$