2 Lineare und bilineare Finite Elemente in 2D

Sei $\bar\Omega = \bigcup_{\tau\in\mathscr{T}} \bar\tau$ eine Zerlegung in Drei- und Vierecke $\bar\tau = \operatorname{conv}\mathscr{N}_\tau$.

(2.1) Eine Zerlegung heißt *zulässig*, wenn $\operatorname{conv}(\mathscr{N}_\tau \cap \operatorname{conv}\mathscr{N}_{\tau'}) = \operatorname{conv}\mathscr{N}_\tau \cap \operatorname{conv}\mathscr{N}_{\tau'}$ für $\tau,\tau' \in \mathscr{T}$.

Zu jedem Drei- oder Viereck $\tau\in\mathscr{T}$ sei $\hat\tau = \operatorname{conv}\mathscr{N}_{\hat\tau}$ das Referenzdreieck oder -viereck.
In $\hat\tau$ bestimme eine Knotenbasis $\hat\phi_i$ mit $\hat\phi_i(\hat z_j) = \delta_{ij}$ für $\hat z_j \in \mathscr{N}_{\hat\tau}$. Setze $V_{\hat\tau} = \operatorname{span}\{\hat\phi_i\}$.
Sei $\varphi_\tau\colon \hat\tau \longrightarrow \bar\tau$ und $V_\tau = \{\hat\phi\circ\varphi_\tau^{-1}\colon \hat\phi\in V_{\hat\tau}\}$. Setze $\mathscr{N} = \bigcup_{\tau\in\mathscr{T}}\mathscr{N}_\tau = \{z_1,\dots,z_N\}$.

Definiere $V_h = \{\phi_h\colon \phi_h\circ\varphi_\tau \in V_{\hat\tau}\}$ und $V_h(u) = \{\phi_h\in V_h\colon \phi_h(z) = u(z) \text{ für } z\in\mathscr{N}\cap\Gamma_{\mathrm{D}}\}$.
Die Finite-Elemente-Lösung $u_h\in V_h(u_{\mathrm{D}})$ ist durch die Variationsgleichung

$$\int_\Omega K\nabla u_h\cdot\nabla\phi_h\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi_h\,\mathrm{d}a\,, \qquad \phi_h\in V_h(0)$$

definiert. Sei $\phi_1,\dots,\phi_N\in V_h$ eine Knotenbasis mit $\phi_n(\hat z_k) = \delta_{nk}$ und $u_h = \sum \underline{u}_n\phi_n$.
Dann gilt $\underline{A}\,\underline{u} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A}[n,k] = \int_\Omega K\nabla\phi_k\cdot\nabla\phi_n\,\mathrm{d}x\,, \qquad \underline{b}[n] = \int_{\partial\Omega} g_{\mathrm{N}}\phi_n\,\mathrm{d}a$$

für $n\notin I_{\mathrm{D}} = \{n\colon z_n\in\Gamma_{\mathrm{D}}\}$. Für $n\in I_{\mathrm{D}}$ setze $\underline{A}[n,k] = \delta_{nk}$ und $\underline{b}[n] = u_{\mathrm{D}}(z_n)$.

(2.2) Sei K symmetrisch und uniform positiv definit (d.h. $Ky\cdot y\ge\kappa|y|^2$ mit $\kappa>0$), und sei $I_D\neq\emptyset$.
Dann ist $\underline{A}$ regulär und auf $\underline{V}(0) = \{\underline{v}\in\mathbb{R}^N\colon \underline{v}_n = 0 \text{ für } n\in I_{\mathrm{D}}\}$ symmetrisch positiv definit.