3 Lösung dünn besetzter Gleichungssysteme

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Bestimme eine Lösung $u \in \mathbb{R}^N$ von $Au = b$.

(3.1) Eine Matrix A heißt *dünn besetzt*, wenn $C > 0$ unabhängig von N existiert, so dass gilt

$$|\{(n,k)\colon A[n,k] \neq 0\}| \leq C\,N\,.$$

Sei $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ein dünn besetzter Vorkonditionierer.

LS0) Gegeben u^0, wähle $\varepsilon, \theta > 0$, setze $r^0 = b - Au^0$ und $k = 0$.

LS1) Falls $|r^0| \leq \max\{\varepsilon, \theta|r^0|\}$ STOP

LS2) Berechne

$$\begin{aligned} c^k &= Br^k \\ u^{k+1} &= u^k + c^k \\ r^{k+1} &= r^k - Ac^k \end{aligned}$$

LS3) Setze $k := k+1$ und gehe zu LS1).

Zur Zerlegung $A = D + L + R$ mit $D = \mathrm{diag}(A)$ und Dreicksmatrizen L und R definiere $B_{\mathrm{Jac}} = D^{-1}$ (Jacobi) und $B_{\mathrm{GS}} = (D+L)^{-1}$ (Gauss-Seidel).

Zu $A = \sum A_p$, Vorkonditionierern B_p und Restriktionen R_p definiere $B_{\mathrm{par}} = \sum R_p^\top B_p R_p$.

Zu Restriktionen $R_0, \dots, R_{L-1}$ und $A_L = A$ definiere rekursiv $A_l = R_l A_{l+1} R_l^\top$ und B_l durch $B_0 = A_0^{-1}$ und $c_l = B_l r_l$ mit

$$\begin{aligned} c_l &= B_{\mathrm{GS}} r_l \\ r_l &:= r_l - A_l c_l \\ c_{l-1} &= B_{l-1} R_{l-1} r_l \\ c_l &:= c_l + R_{l-1}^\top c_{l-1}\,. \end{aligned}$$