4 Gemischte Finite Elemente

Betrachte das System

$$\operatorname{div} q = 0\,, \qquad q = K\nabla u \qquad \text{in } \Omega$$

mit den Randbedingungen

$$u = u_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}}\,, \qquad q\cdot n = g_{\mathrm{N}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}}\,.$$

Sei $\mathscr{T}$ eine zulässige Triangulierung, und seien $\mathscr{F}$ die Seiten $f = \partial\tau\cap\partial\tau'$ bzw. $f = \partial\tau\cap\partial\Omega$.

Im Referenzdreieck oder -viereck definiere $\hat{W} = \operatorname{span}\{\hat{\psi}_i\}$ mit Vektorfeldern $\hat{\psi}_i$ zu jeder Elementseite $\hat{f}_i$ mit $\int_{\hat{f}_j} \hat{\psi}_i \cdot n\,\mathrm{d}a = \delta_{ij}$. Sei $\varphi_\tau\colon \hat{\tau} \longrightarrow \bar{\tau}$ und $W_\tau = \{\mathrm{D}\varphi_\tau\hat{\phi}\circ\varphi_\tau^{-1}\colon \hat{\phi}\in\hat{W}\}$.
Zu jeder Seite $f_n \in \mathscr{F}\}$ sei ψ_n das Vektorfeld mit $\int_{f_k} \hat{\psi}_n \cdot n_{f_k}\,\mathrm{d}a = \delta_{kn}$ und $\psi_n|_\tau \in W_\tau$ für $f\subset\partial\tau$.

Definiere $W_h = \{\psi_n\colon f_n\in\mathscr{F}\}$ und $W_h(g) = \{\psi_h \in W_h\colon \int_f \psi_h\cdot n\,\mathrm{d}a = \int_f g\,\mathrm{d}a \text{ für } f\subset\Gamma_{\mathrm{N}}\}$.
Definiere $Q_h = \prod_\tau \mathscr{P}_0$. Die gemischte Finite-Elemente-Lösung $(q_h, u_h)\in W_h(g_{\mathrm{N}})\times Q_h$ ist durch das Sattelpunkt-Problem

$$\begin{aligned}
\int_\Omega K^{-1} q_h\cdot\psi_h\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_h \operatorname{div}\psi_h\,\mathrm{d}x &= \int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} u_{\mathrm{D}}\phi_h\cdot n\,\mathrm{d}a,\\
\int_\Omega \operatorname{div} q_h\phi_h\,\mathrm{d}x &= 0\,, \qquad (\psi_h,\phi_h)\in W_h(0)\times Q_h
\end{aligned}$$

definiert. Für die analytische Lösung q und für Finite-Elemente-Lösungen $q_h\in W_h$ und $u_h\in V_h$ mit $u_h = u_{\mathrm{D}}$ auf Γ_{D} und $q_h\cdot n = g_{\mathrm{N}}$ auf Γ_{N} gilt die Fehlerabschätzung

$$\|q-q_h\|_{K^{-1}} \le C\|K\nabla u_h - q_h\|_{K^{-1}} \qquad \text{mit } \|\psi\|^2_{K^{-1}} = \int_\Omega K^{-1}\psi\cdot\psi\,\mathrm{d}x\,.$$