5 Finite Volumen für die lineare Transportgleichung

Zu gegebenem Fluss $q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ mit $\operatorname{div} q = 0$ bestimme die Dichte $\rho\colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho q) = 0 \text{ in } [0,T]\,, \qquad \rho(0) = \rho_0\,,$$

und mit der Einfluss-Randbedingung

$$\rho = \rho_{\text{in}} \text{ auf } \Gamma_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega\colon q \cdot n < 0\}\,.$$

Sei $F(\rho) = \rho q$ der Fluss und definiere M, A, b durch

$$(M\rho,\phi)_\Omega = \int_\Omega \rho\phi \,\mathrm{d}x\,, \quad (A\rho,\phi)_\Omega = -(\operatorname{div} F(\rho),\phi)_\Omega + (F(\rho)\cdot n,\phi)_{\Gamma_{\text{in}}}\,, \quad (b,\phi)_\Omega = -(F(\rho_{\text{in}})\cdot n,\phi)_{\Gamma_{\text{in}}}\,.$$

Dann gilt $(M\partial_t\rho,\phi)_\Omega = (A\rho + b,\phi)_\Omega$ für alle $\phi \in L_2(\Omega)$ und $t \in (0,T)$.

Definiere $Q_h = \prod_\tau \mathbb{P}_0$ (finite Volumen) bzw. $Q_h = \prod_\tau \mathbb{P}_p$ (discontinuous Galerkin).

Definiere M_h, A_h, b_h durch $(M_h\rho_h,\phi_h)_\Omega = (M\rho_h,\phi_h)_\Omega$, $(b_h,\phi_h)_\Omega = (b,\phi_h)_\Omega$, und

$$(A_h\rho_h,\phi_h)_\Omega = \Big(\sum_\tau -(\operatorname{div} F(\rho_h),\phi_h)_\tau + \sum_{f\subset\partial\tau\setminus\Gamma_{\text{in}}} (F(\rho_\tau) - F^*_{\tau,f}(\rho_h)\cdot n,\phi_h)_f\Big) + (F(\rho_h)\cdot n,\phi_h)_{\Gamma_{\text{in}}}$$

mit dem numerischen Fluss auf $f = \partial\tau \cap \partial\tau'$

$$F^*_{\tau,f}(\rho_h) = [F(\rho_h)]_f - |[F(\rho_h)]_f|\,, \qquad [F(\rho_h)]_f = F(\rho_{\tau'}) - F(\rho_\tau)$$

und $F^*_{\tau,f}(\rho_h) = 0$ für $f \subset \partial\Omega \setminus \Gamma_{\text{in}}$.