6 Adaptivität

Sei $u_h \in V_h(u_\mathrm{D})$ für $h \in \mathscr{H}$ eine Finite-Elemente-Approximation der Lösung u von $-\operatorname{div} K\nabla u = 0$ in Ω mit $u = u_\mathrm{D}$ auf Γ_D und $K\nabla u \cdot n = g_\mathrm{N}$ auf Γ_N.

Wir schätzen den Fehler bezüglich $\|\phi\|_{1,\Omega} = \Big(\|\phi\|_\Omega^2 + \|\nabla\phi\|_\Omega^2\Big)^{1/2}$.

Dazu setzen wir voraus, dass für die Triangulierungen $\mathscr{T}_h$ und die Finite-Elemente-Räume V_h für alle $h \in \mathscr{H}$ folgende Abschätzungen mit Konstanten unabhängig von h gelten:

$$\inf_{\phi_h \in V_h} \|u - \phi_h\|_\tau + h_\tau^{1/2}\|u - \phi_h\|_{\partial\tau} \le C h_\tau \|u\|_{1,\tau}\,, \qquad h_\tau \|\nabla\phi_h\|_\tau + h_\tau^{1/2}\|\phi_h\|_{\partial\tau} \le C\,\|\phi_h\|_\tau\,.$$

(7.1) Für den Fehlerschätzer

$$\eta_h = \Big(\sum_{\tau\in\mathscr{T}} \eta_\tau^2\Big)^{1/2}$$

mit

$$\eta_\tau^2 = h_\tau^2 \|\operatorname{div} K\nabla u_h\|_\tau^2 + \frac{1}{2} h_\tau \sum_{f\subset\partial\tau} \|[K\nabla u_h]\cdot n\|_f^2$$

und $[\psi] = \psi_{\tau'} - \psi_\tau$ auf $f = \partial\tau \cap \partial\tau'$ gilt:

a) Der Fehlerschlätzer ist zuverlässig, d.h.

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \le C\,\eta_h\,.$$

b) Der Fehlerschlätzer ist effizient, d.h.

$$\eta_\tau \le C\,\|u - u_h\|_{1,\omega_\tau} \qquad \text{mit } \bar\omega_\tau = \cup_{\partial\tau\cap\partial\tau'\neq\emptyset}\,\bar\tau'\,.$$