7 Die Konvektions-Diffusions-Reaktionsgleichung

Zu gegebenem Fluss $q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ mit $\operatorname{div} q = 0$, Diffusionstensor $K_c\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{D\times D}$ und Reaktionsrate $r\colon \Omega \times [0,t] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimme die Konzentration $c\colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t c - \operatorname{div}(K_c \nabla c - cq) = r(c) \ \text{ in } \ [0,T]\,, \qquad c(0) = c_0\,,$$

mit den Randbedingungen

$$c = c_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}} \times [0,T]\,, \quad K_c \nabla c \cdot n = g_{\mathrm{N}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}} \times [0,T]\,, \quad K_c \nabla c \cdot n + \alpha c = g_{\mathrm{R}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{R}} \times [0,T]\,.$$

Definiere A und R durch

$$\begin{aligned} (Ac,\phi)_\Omega &= \int_\Omega \big(K_c \nabla c \cdot \nabla \phi + q \cdot \nabla c \phi\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} \alpha c \phi \,\mathrm{d}a, \\ (R(c),\phi)_\Omega &= \int_\Omega r(c)\phi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi\,\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} g_{\mathrm{R}}\phi\,\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

(7.1) Dann gilt $(\partial_t c,\phi)_\Omega + (Ac,\phi)_\Omega = (R(c),\phi)_\Omega$ für alle $\phi \in V$ und $t \in (0,T)$.

(7.2) Sei $\Gamma_{\mathrm{D}} \cup \mathcal{N}_h \neq \emptyset$, $q \cdot n \geq 0$ auf Γ_{N}, $\alpha + \frac{1}{2} q \cdot n \geq 0$ auf Γ_{R}, $\partial_3 r \leq 0$, und K_c uniform positiv definit. Dann ist für alle $\triangle t > 0$ das diskrete Problem

$$c_h^n \in V_h(c_D(t_n))\colon \qquad \Big(\frac{1}{\triangle t}(c_h^n - c_h^{n-1}) + Ac_h^n - R'(c_h^n), \phi_h\Big)_\Omega = 0\,, \qquad \phi_h \in V_h(0)$$

eindeutig lösbar.