

Schnupperkurs Mathematik 2019

Verschlüsselung - Von Caesar bis zum TXDQWHQFRPSXWHU

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Teilbarkeitsregeln)

(2+2+1+2 Punkte)

Eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ lässt sich darstellen durch $a = \sum_{n=0}^N a_n 10^n$. Z. B. gilt

$$27463 = 3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4.$$

Beachte $10^0 = 1$. Nutze die Rechenregeln der Kongruenzarithmetik

„Für $(a \equiv a' \pmod{m})$ und $(b \equiv b' \pmod{m})$ gilt: $(a \pm b) \equiv (a' \pm b') \pmod{m}$ und $(a \cdot b) \equiv (a' \cdot b') \pmod{m}$ “,

um folgende Teilbarkeitsregeln herzuleiten:

(a) Eine Zahl $a = \sum_{n=0}^N a_n 10^n \in \mathbb{N}$ ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre

Quersumme $\sum_{n=0}^N a_n$ durch 9 teilbar ist.

Hinweis: Es lässt sich sogar zeigen, dass $\sum_{n=0}^N a_n 10^n$ und $\sum_{n=0}^N a_n$ den gleichen Rest bei Division durch 9 besitzen.

(b) Eine Zahl $a = \sum_{n=0}^N a_n 10^n \in \mathbb{N}$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre

Quersumme $\sum_{n=0}^N a_n$ durch 3 teilbar ist.

Hinweis: Es lässt sich sogar zeigen, dass $\sum_{n=0}^N a_n 10^n$ und $\sum_{n=0}^N a_n$ den gleichen

Rest bei Division durch 3 besitzen.

(c) Leiten Sie eine verbesserte Teilbarkeitsregel bei Division durch 3 her.

(d) Leiten Sie eine Teilbarkeitsregel bei Division durch 11 her.

Aufgabe 2 (Eulersche φ -Funktion)

(2+2 Punkte)

Bezeichne $\varphi(m)$ die Anzahl von zu m teilerfremden Zahlen zwischen 1 und m , also

$$\varphi(m) = |\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq m \wedge \text{ggT}(m, n) = 1\}|.$$

Hierbei liefert $|\mathcal{M}|$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge \mathcal{M} . Die Funktion φ heißt **Eulersche φ -Funktion**.

(a) Bestimme $\varphi(24)$ und $\varphi(15)$

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Bestimme $\varphi(p)$.

Beachte: Wir besprechen die Aufgaben in der nächsten Vorlesung.

Infos: <http://www.math.kit.edu/ianm3/~dweiss/seite/schnuppermathe2019/>