Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

1. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 24.10.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 1: (4 Bonuspunkte)
Man betrachte eine (klassische) Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u. \tag{1}$$

Zur Zeit $t = 0$ gelte $u, u_t = 0$ außerhalb des Balles $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^d$. Man zeige, dass die Energie

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 + c^2 (\nabla u)^2 \mathrm{dx} \tag{2}$$

zeitlich konstant ist.
Hinweis: Sie können ohne Beweis davon ausgehen, dass zum Zeitpunkt $t = T$ $u, u_t = 0$ außerhalb von $B_{cT+R}(0) \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt (*endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit*). Berechnen Sie E_t mit Hilfe der ersten Greenschen Formel (*partielle Integration*).

Aufgabe 2: (4 Bonuspunkte)
Die Potentialgleichung

$$\Delta u = 0 \tag{3}$$

sei im Kreis $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, \|x\|_2 < 1\}$ mit der Randwertvorgabe für die Ableitung in Normalenrichtung (*Neumann-Problem*)

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r,\varphi)\Big|_{r=1} = g(\varphi) \qquad \text{für } \varphi \in [-\pi, \pi], \tag{4}$$

zu lösen. Man bestimme eine Lösung, wenn $g \in C^1(\mathbb{T})$ als Fourier-Reihe ohne konstanten Term

$$g(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) \tag{5}$$

gegeben ist.