Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 07.11.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 3: (2 + 2 = 4 Punkte)

(a) Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= -3\sin(2t) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Berechnen Sie die reell-analytische Lösung $u \in C^\omega(\mathbb{R})$ durch den Potenzreihenansatz

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} t^n. \tag{2}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Koeffizienten $u^{(n)}(0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe der Differentialgleichung (1). Weisen Sie nach, dass die Potenzreihe (2) Konvergenzradius unendlich hat. Zeigen Sie, dass (2) das Anfangswertproblem löst.

(b) Gegeben sei das Cauchy-Problem:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times (0,\infty)\big) \\ u(x,0) &= x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x,0) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x,0) &= 2 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Berechnen Sie die reell-analytische Lösung $u \in C^\omega(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ durch den Potenzreihenansatz

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{N}_0 \\ k+l=n}} \frac{\partial_x^k \partial_y^l u(0,0)}{k!\,l!} x^k y^l.$$

Hinweis: Die Lösung ist ein Polynom in x, y.

-Bitte wenden!-

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Gegeben sei eine Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ mit der Feinheit

$$h_{\max} = \max_{k=0,\cdots,N-1} |x_{k+1} - x_k| \, .$$

Zeigen Sie: für jede stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion f mit

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_N) = 0,$$

gilt die Abschätzung

$$\|f\|_2 \leq h_{\max} \|f'\|_2 \, . \tag{3}$$

Hinweis: Nach dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$f(x) = f(y) + \int_y^x f'(z)\mathrm{dz} \qquad (\forall y \leq x \in [a, b])$$

Bemerkung: Die Abschätzung (3) gilt bereits für absolut stetige f.

Aufgabe 5: (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Bestimmen Sie den Typ (*elliptisch*, *parabolisch* oder *hyperbolisch*) der Differentialgleichungen

(a) $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0,$

(b) $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0,$

(c) $2(\partial_x + \partial_y)^2 u + \partial_y u = 0.$

Hinweis: Der Typ kann von den Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ abhängen.