Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 07.11.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 6: (1 + 1 = 2 Punkte)
Betrachten Sie die *Wellen-* bzw. *Wärmeleitungsgleichung*

(a) $u_{xx} - u_{yy} = 0$

(b) $v_x - v_{yy} = 0$

im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle Charakteristiken im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 7: (1 + 3 = 4 Punkte)
Sei $\Omega = (0, 2)$. Betrachten Sie die durch

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}, \qquad v(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

definierte Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $u \in H^1(\Omega)$

(b) $v \notin H^1(\Omega)$

Hinweis: Zeigen Sie in (b), dass eine $\|\cdot\|_{H^1}$-beschränkte Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ nicht gegen v in $\|\cdot\|_2$ konvergieren kann. Benutzen Sie dazu den „Trick" aus Aufgabe 4.

Erinnerung: Eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ liegt genau dann im Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$, wenn es eine Funktion $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ gibt, für die $\|u_n - u\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$ und $\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$ gilt.
Man nennt $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ die *schwache Ableitung* von u. Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ stimmt ∇u mit dem Gradienten von u (fast überall) überein. Auf $H^1(\Omega)$ wird durch

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_\Omega |u|^2 + (\nabla u)^2 \, \mathrm{dx}} \qquad \big(u \in H^1(\Omega)\big)$$

eine Norm erklärt.

-Bitte wenden!-

Aufgabe 8: (1 + 2 = 3 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Betrachten Sie die durch

$$u(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \qquad v(x,y) = \sin\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

definierte Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $u \in H^1$

(b) $v \in H^1$

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst die Quadratintegrierbarkeit der Ableitungen. Benutzen Sie in (b) 2D-Polarkoordinaten.