Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 14.11.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 9: (2 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Ferner sei $u \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die schwachen Ableitungen $\partial_i u$ $(i \in \{1, \ldots, d\})$ existieren und mit den gewöhnlichen Ableitungen übereinstimmen. Es ist, mit anderen Worten,

$$\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)\mathrm{dx} = (-1)\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\mathrm{dx} \qquad (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega))$$

zu zeigen.
Hinweis: Setzen Sie den Integranden geschickt fort und benutzen Sie den Satz von Fubini und partielle Integration.

Aufgabe 10: (1 + 3 = 4 Punkte)
Betrachten Sie im Kreissektor mit Mittelpunktswinkel $0 < \omega \leq 2\pi$

$$\Omega_\omega = \{r\cos(\varphi), r\sin(\varphi) | 0 < r < 1, 0 < \varphi < \omega\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

das folgende Randwertproblem in 2D-Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \Delta u_\omega(r,\varphi) &= 0 \; ((r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \Omega_\omega) \\ u_\omega(r,\varphi) &= 0 \; (0 \leq r \leq 1, \varphi \in \{0,\omega\}) \\ u_\omega(1,\varphi) &= \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) \; (\varphi \in (0,\omega)) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u_\omega(r,\varphi) = r^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) \qquad (r \in [0,1], \varphi \in [0,\omega])$$

definierte Funktion das obige Randwertproblem löst.

(b) Zeigen Sie, dass für $\pi < \omega \leq 2\pi$, d.h. im Fall eines stumpfen Mittelpunktswinkels, ∇u_ω zwar unbeschränkt, aber noch quadratintegrabel ist. Zeigen sie ferner, dass Ableitungen zweiter Ordnung nicht mehr quadratintegrabel sind. Wie sieht es bei spitzem Mittelpunktswinkel, d.h. $0 < \omega < \pi$, aus?

-Bitte wenden!-

Aufgabe 11: (3 + 1 = 4 Punkte)
Betrachten Sie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d-1}$ definiert durch

$$(Lv)_j = b_j v_{j-1} - a_j v_j + c_j v_{j+1} \qquad (j \in \{1, \dots, d-1\}).$$

Dabei ist $d \geq 2$ und die Koeffizienten erfüllen $b_j, c_j > 0$ und $a_j \geq b_j + c_j$ für alle $j \in \{1, \dots, d-1\}$.

(a) Beweisen Sie das folgende *diskrete Maximumprinzip*:
Wenn eine nicht-negative maximale Komponente

$$v_{j^*} = \max_{j \in \{0,\dots,d\}} v_j \geq 0$$

des Vektors $v = (v_0, \dots, v_d)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $Lv \geq 0$ einen *inneren Index*

$$1 \leq j^* \leq d-1$$

trägt, so gilt $v_0 = v_1 = \cdots = v_d$.

(b) Beweisen Sie die *inverse Monotonie* von $-L$:
Wenn für die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^{d+1}$ die Bedingungen

$$-Lu \leq -Lv \qquad \text{und} \qquad u_0 \leq v_0,\ u_d \leq v_d$$

erfüllt sind, so gilt $u \leq v$.