Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

5. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 21.11.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 12: (3 + 1 + 1 = 5 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Ferner sei $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ ein linearer *elliptischer* Differentialoperator der Form

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + c(x)u \qquad (x \in \Omega)$$

mit $a_{ij} \in C(\Omega)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ und $c \in C(\Omega)$, $c \geq 0$.

(a) Zeigen Sie für L ein *abgeschwächtes Maximumprinzip*:
Ist $Lu \leq 0$ in Ω für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so folgt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{0, \max_{x \in \partial\Omega} u(x)\}.$$

Hinweis: Wenden Sie das Maximumprinzip aus der Vorlesung auf den Differentialoperator $L - c$ geeignet an.

(b) Folgern Sie aus (a) für L ein *abgeschwächtes Minimumprinzip*:
Ist $Lu \geq 0$ in Ω für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so folgt

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \geq \min\{0, \min_{x \in \partial\Omega} u(x)\}.$$

(c) Betrachten Sie das folgende Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu_i &= f && \text{in } \Omega \\ u_i &= g_i && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in C(\Omega)$, $g_i \in C(\partial\Omega)$, $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b) die *stetige Abhängigkeit* der klassischen Lösungen $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von den Randdaten:

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_\infty$$

-Bitte wenden!-

Aufgabe 13: (3 + 1 + 1 = 4 Punkte + 1 Bonuspunkt)
Betrachten Sie in $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \|x\|_2 < 1\}$ das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. Für eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ergibt die Forderung $u|_{\partial\Omega} = g$ einen Sinn. Für eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ der zugehörigen *schwachen Formulierung* ist diese Forderung hingegen nicht sinnvoll. Ziel dieser Aufgabe ist es, den *Spuroperator* T zu definieren, welcher die Vorgabe von Randwerten für schwache Lösungen ermöglicht.

(a) Sei $T : H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega)$ definiert durch:

$$Tu = u|_{\partial\Omega}$$

Zeigen Sie, dass T ein stetiger linearer Operator im folgenden Sinn ist: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1}$$

für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ausfällt.

Hinweis: Fassen Sie $\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ als Oberflächenintegral einer geschickt gewählten vektorwertigen Funktion auf und benutzen Sie den Satz von Gauß.

(b) Setzen Sie T eindeutig zum stetigen linearen Operator $\overline{T} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ fort. Zeigen Sie, dass

$$\overline{T}u = u|_{\partial\Omega}$$

für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt.

Hinweis: $H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ist dicht in $H^1(\Omega)$.

Bemerkung: $\overline{T}u$ wird die *Spur* der $H^1(\Omega)$-Funktion u genannt.

(c) Zeigen Sie, dass eine $L^2(\Omega)$-Funktion im Allgemeinen keine Spur hat. D.h. es existiert kein stetiger linearer Operator $S : L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit

$$Su = u|_{\partial\Omega}$$

für alle $u \in L^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.