Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

6. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 28.11.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 14: (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Betrachten Sie den Differentialoperator $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definiert durch

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u(x) \qquad \left(x \in \Omega, u \in C^2(\Omega)\right) \quad (1)$$

mit $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $b_i, c \in C(\overline{\Omega})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Man nennt L in der Darstellung (1) einen *Operator in Divergenzform.*

(a) Sei $\alpha : C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die durch

$$\alpha(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i u_{x_i} v + cuv \mathrm{d}x \qquad (2)$$

für alle $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ definiert wird. Zeigen Sie:

$$\alpha(u, v) = \int_\Omega Lu(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad (u, v \in C_0^\infty(\Omega))$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gauß.

(b) Zeigen Sie, dass α in der $H^1(\Omega)$-Norm stetig ist, d.h., dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} |\alpha(u, v)| &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= C\sqrt{\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \, dx\right) \cdot \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)} \end{aligned}$$

für alle $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ ausfällt. Setzen Sie α dann zur stetigen Bilinearform $\overline{\alpha} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ fort.

Hinweis: Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung. Bedenken Sie, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt.

-Bitte wenden!-

(c) Für diese Teilaufgabe sei $b_i \equiv 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, $c \geq 0$ und der Operator L sei *gleichmäßig elliptisch* in Ω, d.h. es existiert eine Konstante $d > 0$ so dass

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq d\,|\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $\overline{\alpha}$ aus Teilaufgabe (b) koerziv ist.

Hinweis: Es reicht die nötige Ungleichung für α zu beweisen. Sie überträgt sich aus Stetigkeitsgründen auf $\overline{\alpha}$.

Aufgabe 15: (1 + 1 + 3 + 3 = 5 Punkte + 3 Bonuspunkte)
Betrachten Sie in $\Omega = (0, 1)$ das Dirichlet-Problem

$$Lu(x) := -u''(x) + u(x) = 2x =: f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie eine klassische Lösung der Randwertaufgabe (3).

Hinweis: Die durch $u_{\text{part}}(x) = 2x$ definierte Funktion löst die Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die schwache Formulierung (stetige koerzive Bilinearform für den Differentialoperator L und stetiges lineares Funktional für die rechte Seite f) der Randwertaufgabe (3) in $H_0^1(\Omega)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse der Aufgabe 14.

(c) Für $N \in \mathbb{N}$ seien $h = \frac{1}{N}$ und $x_k = hk$ für $k \in I := \{0, \dots, N\}$. Ferner sei die *Hutfunktion* $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definert durch $\Psi(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie den *Ansatzraum*

$$V_h = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) | f(0) = f(1) = 0, \forall k \in I \setminus \{N\} : f|_{[x_k, x_{k+1}]} \text{ ist linear} \right\} \subseteq H_0^1(\Omega)$$

mit der Basis $B_h := \{\Psi_1, \dots \Psi_{N-1}\}$. Dabei sind die Funktionen $\Psi_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Psi_k(x) = \Psi\left(\frac{x - x_k}{h}\right) \qquad (x \in [0, 1])$$

für alle $k \in I \setminus \{0, N\}$. Bestimmen Sie für $N \geq 2$ die Steifigkeitsmatrix sowie den Lastvektor in der Basis B_h für die schwache Formulierung aus Teilaufgabe (b).

(d) Lösen Sie das diskretisierte Problem aus (c) mit Hilfe eines Computers für $N \in \{10, 20\}$ und drucken Sie einen Plot der exakten und approximativen Lösungen.