Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

7. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 05.12.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 16: (1 + 1 = 2 Punkte)
Betrachten Sie die Folgenräume:

$$l^p = \begin{cases} \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\right\} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\} & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

Sei $p \leq q$. Aus der Vorlesung über Funktionalanalysis ist $l^p \subseteq l^q$ bekannt. Untersuchen Sie die Einbettung $\iota : l^p \hookrightarrow l^q$ auf

(a) Stetigkeit und

(b) Kompaktheit.

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ ein beschränktes, zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet, welches eine Kegelbedingung erfüllt. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \mathrm{d}x \right\|_2 \leq C \left\| \nabla u \right\|_2$$

Dabei bezeichnet $|\Omega| = \lambda^d(\Omega)$ das Lebesgue-Maß von Ω.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und benutzen Sie den Rellichschen Auswahlsatz. Sie können ohne Beweis verwenden, dass ein $v \in H^1(\Omega)$ mit $\nabla v = 0$ konstant ist.

Bemerkung: Diese Ungleichung verallgemeinert die Poincaré-Ungleichung.

-Bitte wenden!-

Aufgabe 18: (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Bonuspunkte)
Sei $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres endliches Intervall.

(a) Sei $u \in C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Zeigen Sie

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x - y|}\, \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

für alle $x, y \in \Omega$.

Hinweis: Benutzen Sie den „Trick“ aus Aufgabe 4.

(b) Sei $u \in C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass u sich eindeutig zu einer stetigen Funktion $\overline{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt.

Hinweis: Benutzen Sie die Teilaufgabe (a).

(c) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-beschränkte Folge in $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Ferner möge für ein festes $x_0 \in \Omega$ die Folge $(u_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sein. Zeigen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm auf $C(\overline{\Omega})$ beschränkt ist.

Hinweis: Benutzen Sie wieder die Teilaufgabe (a).

(d) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-beschränkte Folge in $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass sie gleichgradig stetig ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x, y \in \overline{\Omega} : |x - y| < \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| < \varepsilon.$$

Hinweis: Benutzen Sie schon wieder die Teilaufgabe (a).

(e) Sei $u \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $v \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ existiert, so dass $\|u - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$ gilt.

Hinweis: Bedenken Sie, dass $C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ dicht liegt in $H^1(\Omega)$. Ferner ist aus den Vorlesungen über Analysis bekannt, dass jede konvergente Folge in $L^2(\Omega)$, eine punktweise fast überall konvergente Teilfolge besitzt. Benutzen Sie alle vorhergehenden Teilaufgaben und den Satz von Arzelà-Ascoli (siehe unten).

Bemerkung: Diese Aufgabe rechtfertigt die Schreibweise $H^1(\Omega) \subseteq C(\Omega)$.

Satz von Arzelà-Ascoli:
Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(K)^{\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen die

(i) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm beschränkt und

(ii) gleichgradig stetig ist.

Dann besitzt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.