Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

8. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 12.12.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 19: (2 + 2 = 4 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ ein beschränktes, zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet, welches eine Kegelbedingung erfüllt.

(a) Betrachten Sie den Interpolationsoperator $I : H^1(\Omega) \to \mathcal{P}_0 \subseteq H^1(\Omega)$ definiert durch

$$Iu = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\mathrm{dx}.$$

Zeigen Sie: I ist ein stetiger linearer Operator.

(b) Sei $L : H^1(\Omega) \to Y$ ein stetiger linearer Operator in den normierten Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $\mathcal{P}_0 \subseteq \ker L$. Zeigen Sie: es existiert eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass

$$\|Lu\|_Y \leq C \|L\| \|\nabla u\|_2$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$ ausfällt.

Hinweis: Benutzen Sie den Operator I aus Teilaufgabe (b) und Aufgabe 17.

Bemerkung: Dies ist das Bramble-Hilbert-Lemma für $t = 1$.

Aufgabe 20: (2 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet und τ_h eine quasiuniforme Triangulierung von Ω. Nach dem Approximationssatz aus der Vorlesung, gilt für die Interpolation durch stückweise lineare Funktionen I_h mit einer Konstante $C = C(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|I_h u\|_{2,h} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

für alle $u \in H^2(\Omega)$.
Zeigen Sie durch Gegenbeispiel, dass für keine Konstante $C > 0$ die Abschätzung

$$\|I_h u\|_{0,h} \leq C \|u\|_{H^0(\Omega)}$$

für alle $u \in H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ gültig ist.