Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 19.12.2012, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 21: 3 + 3 = 6 Punkte
Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

nicht-kolineare Punkte im $\mathbb{R}^2$ und

$$K = \left\{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1 \wedge \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \right\}$$

ihre konvexe Hülle, also das echte Dreieck, welches a_1, a_2, a_3 als Eckpunkte hat. Bezeichne $a_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} a_i$ seinen *Schwerpunkt*. Die Vektoren seiner Seiten sind gegeben durch

$$d_1 = a_2 - a_3, \quad d_2 = a_3 - a_1, \quad d_3 = a_1 - a_2.$$

Definiere die Richtungsvektoren $\nu_i = \frac{d_i}{|d_i|}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Des Weiteren sei $\Pi = \mathbb{P}_3$[1]. Schließlich sei $\Sigma = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{32}\} \subseteq \Pi^*$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma_i(p) &= p(a_i) \text{ für } i \in \{0, \ldots, 3\} \\ \sigma_{ij}(p) &= \nabla p(a_i) \cdot \nu_j \text{ für } i \neq j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

für alle $p \in \Pi$. Betrachten Sie das finite Element (K, Π, Σ).

(a) Zeigen Sie die Unisolvenz von Σ.

(b) Für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks K, konstruieren Sie die *nodale* Basis $B = \{p_\iota\}_{\iota \in I}$ von Π: d.h. für eine Indizierung I von Σ und B soll

$$\sigma_\iota(p_\kappa) = \delta_{\iota\kappa}$$

für alle $\iota, \kappa \in I$ gelten.

Hinweis: Rechnen Sie in normierten baryzentrischen Koordinaten. Benutzen Sie Skizzen.

-Bitte wenden!-

[1] Menge der Polynomfunktionen in zwei Veränderlichen vom Grad höchstens drei.

Aufgabe 22: 2 + 2 = 4 Punkte
Sei $\Omega = [-\pi, \pi]^2$, $u \in L^2(\Omega)$. Die *Fourier-Koeffizienten* $(\hat{u}_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ von u sind durch

$$\hat{u}_{kl} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x,y) e^{-\mathrm{i}(kx+ly)} \mathrm{dxdy}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ definiert.

(a) Zeigen Sie:
Gilt $(k\hat{u}_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$, so existiert die schwache partielle Ableitung $\partial_x u$. Ihre Fourier-Koeffizienten sind durch $(\mathrm{i}k\hat{u}_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ gegeben.

Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgenden Aussagen verwenden:

- $\langle v, w\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega v\overline{w}\mathrm{dx} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \hat{v}_{kl}\overline{\hat{w}_{kl}} =: \langle \hat{v}, \hat{w}\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \qquad \forall v, w \in L^2(\Omega)$
- $\widehat{\partial_x\varphi}_{k,l} = ik\hat{\varphi}_{k,l} \qquad \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Bemerkung: Für die schwache partielle Ableitung $\partial_y u$ gilt Entsprechendes.

(b) Zeigen Sie:
Ist $u \in H_0^1(\Omega)$, so gilt für die schwache partielle Ableitung $\partial_x u \in L^2(\Omega)$:

$$\widehat{\partial_x u}_{kl} = \mathrm{i}k\hat{u}_{kl} \qquad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgende Aussage verwenden:

$$\int_\Omega u\partial_x\varphi \mathrm{dx} = -\int_\Omega \varphi\partial_x u \mathrm{dx} \qquad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$$

Bemerkung: Für die schwache partielle Ableitung $\partial_y u$ gilt Entsprechendes.