Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 09.01.2013, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 23: $1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 8$ Punkte
Sei $\Omega = (0,1)^2$, $N \in \mathbb{N}$ und $h = \frac{1}{N}$. Die Stützstellen $(x_i, y_j) \in \overline{\Omega}$ seien durch $x_i = ih$, $y_j = jh$ für $i, j \in \{0, \ldots, N\}$ definiert. Ferner seien die Zellen I_{ij} durch $I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, für $i, j \in \{0, \ldots, N-1\}$, gegeben. Betrachten Sie den Ansatzraum

$$V_h = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) \middle| f|_{\partial\Omega} \equiv 0, \forall i, j \in \{0, \ldots, N-1\} : f|_{I_{ij}} \text{ ist bilinear} \right\} \subseteq H_0^1(\Omega)$$

und die durch

$$\Psi^1(x,y) = (1-x)(1-y),\ \Psi^2(x,y) = x(1-y),\ \Psi^3(x,y) = xy,\ \Psi^4(x,y) = (1-x)y$$

für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ definierten Funktionen.

(a) Finden Sie für jedes $i, j \in \{0, \ldots, N-1\}$ eine affine Transformation $T_{ij} : \overline{\Omega} \to I_{ij}$, so dass

$$\left(\Psi_{ij}^k\right)_{k \in \{1,\ldots,4\}} := \left(\Psi^k \circ T_{ij}^{-1}\right)_{k \in \{1,\ldots,4\}}$$

eine Basis der bilinearen Funktionen auf I_{ij} ist.

(b) Berechnen Sie die zu $-\Delta$ gehörenden *lokalen Steifigkeitsmatrizen*

$$M_{ij} = \left(\int_{I_{ij}} \nabla \Psi_{ij}^k \cdot \nabla \Psi_{ij}^l \right)_{k,l \in \{1,\ldots,4\}}$$

für $i, j \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Teilaufgabe (a) und den Transformationssatz.

(c) Berechnen Sie eine Näherung für M_{ij}, indem Sie anstatt exakt zu integrieren, die folgende 2-dimensionale „Tensorprodukt-Trapezregel" verwenden:

$$Q_T(f) = \frac{|T|}{4} \sum_{k=1}^{4} f(a_k) \qquad a_k \text{ Eckpunkte der Zelle } T$$

-Bitte wenden!-

(d) Die Hutfunktionen Ψ_{ij} sind durch

$$\Psi_{ij}(x,y) = \begin{cases} \Psi^1_{ij}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{ij} \\ \Psi^2_{i-1,j}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{i-1,j} \\ \Psi^3_{i-1,j-1}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{i-1,j-1} \\ \Psi^4_{i,j-1}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{i,j-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \overline{\Omega}$ und alle $i,j \in \{1,\dots N-1\}$ definiert. Sie bilden eine Basis des V_h. Berechnen Sie, ausgehend von den lokalen Steifigkeitsmatrizen aus Teilaufgabe (b), die globale Steifigkeitsmatrix:

$$M = \left(\int_\Omega \nabla\Psi_{ij} \cdot \nabla\Psi_{kl} \right)_{i,j,k,l \in \{1,\dots N-1\}}$$

Hinweis: Fertigen Sie sich eine Skizze an.

(e) Benutzen Sie die genährten lokalen Steifigkeitsmatrizen aus Teilaufgabe (c), um eine Näherung der globalen Steifigkeitsmatrix zu berechnen. Welchen Vorteil hat die Näherung gebracht?

Aufgabe 24: 2 Punkte
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Ferner sei $\lambda_{\min}$ bzw. $\lambda_{\max}$ ihr kleinster bzw. größter Eigenwert. Zeigen Sie:

$$\lambda_{\min} = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T M x}{x^T x} \qquad \lambda_{\max} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T M x}{x^T x}$$

Frohe Weihnachten!