Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

11. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 16.01.2013, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 25: 2 Punkte
Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^d$. Ferner sei durch

$$Q(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

eine quadratische Form Q definiert. Dabei bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^d$. Schließlich sei $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $Ax = b$

(ii) $Q(x) = \min_{y\in\mathbb{R}^d} Q(y)$

Aufgabe 26: $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ Punkte
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix mit den Eigenwerten $0 < \lambda_1 \le \lambda_2$ und der spektralen Konditionszahl $\kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Durch

$$\langle x, y\rangle_A = x^T A y \quad \text{bzw.} \quad \|x\|_A = \sqrt{\langle x, x\rangle_A} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2$$

wird das zu A gehörende *Energie*-Skalarprodukt bzw. Norm definiert.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\langle x, y\rangle = 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{\langle x, y\rangle_A}{\|x\|_A \|y\|_A} \le \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie (durch Beispiel), dass die Abschätzung (1) scharf ist.

(c) Interpretieren Sie die Ungleichung (1) geometrisch.

(d) Bestimmen Sie die Taylorapproximation erster Ordnung der rechten Seite von (1) in κ bei 1 („kleine" Konditionszahl) sowie in $\frac{1}{\kappa}$ bei 0 („große" Konditionszahl).

-Bitte wenden!-

Aufgabe 27: 2 Punkte
Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^d$. Das allgemeine *Abstiegsverfahren* zur iterativen Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ lautet:

(i) Wähle einen *Startwert* $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$ und berechne das *Residuum* $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}_0$ wähle eine *Abstiegsrichtung* $d^{(k)}$, berechne die *Schrittweite*

$$\alpha_k = \frac{\langle r^{(k)}, d^{(k)} \rangle}{\langle Ad^{(k)}, d^{(k)} \rangle},$$

aktualisiere die Lösungsapproximation sowie das Residuum

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} \qquad r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k Ad^{(k)}.$$

(iii) Breche die Schleife (ii) ab, sobald das Residuum hinreichend klein ist, also $\|r^{(k)}\| < \varepsilon$.

Die s.g. *Koordinatenrelaxation* erhält man durch zyklische Wahl der Abstiegsrichtungen $d^{(k)}$ aus den kartesischen Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_d\}$. Zeigen Sie, dass jeder d-Zyklus der Koordinatenrelaxation äquivalent ist zum üblichen *Gauß-Seidel-Verfahren*.