Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

12. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 23.01.2013, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 28: 1 + 1 = 2 Punkte
Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, $b, x_0 \in \mathbb{R}^d$. Definiere $r_0 = b - Ax_0$. Betrachten Sie für $m \in \{1, \ldots, d\}$ den *Krylow-Raum*

$$K_m = \operatorname{span}\left\{r_0, Ar_0, \ldots, A^{m-1}r_0\right\}.$$

Sei $y \in K_m$ und $x = x_0 + y$. Zeigen Sie:

(a) $r := b - Ax \in K_{m+1}$

(b) Ist $r \perp K_m$ und $A^m r_0 \in K_m$, so ist $r = 0$.

Aufgabe 29: 3 + 3 = 6 Punkte
Betrachten Sie das folgende Anfangs-Randwert-Problem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(0,t) &= h(t) && \text{für } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) &= 0 && \text{für } x \in (0,\infty) \end{aligned}$$

mit einer differenzierbaren Funktion $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, deren Ableitung höchstens exponentielles Wachstum besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2t}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) h\left(t - \frac{x^2}{2s^2}\right) \mathrm{ds}$$

definierte Funktion $u : [0,\infty)\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ das Problem löst.

(b) Ist u_t in $(0,\infty)\times(0,\infty)$ beschränkt? Falls nein, welche zusätzliche Bedingungen an h garantieren die Beschränktheit von u_t?