Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

13. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 30.01.2013, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 30: $1 + 1 + 2 = 4$ Punkte
Die *Tschebyscheff*-Polynome $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind durch die folgende Drei-Term-Rekursion definiert:

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = x \qquad T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos\left((n+1)x\right) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos\left((n-1)x\right)$$

Hinweis: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$$

Hinweis: Benutzen Sie die Teilaufgabe (a).

(c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt[1]:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

Aufgabe 31: $2 + 4 = 6$ Punkte
Sei $I = [a, b]$ ein nicht-leeres Intervall, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie das folgende *Minimax*-Problem: Gesucht ist ein Polynom $P_n \in \mathbb{P}_n$ mit $P_n(x_0) = 1$ und

$$\max_{x \in I} |P_n(x)| = \min_{\substack{P(x_0)=1 \\ P \in \mathbb{P}_n}} \max_{x \in I} |P(x)|\,.$$

-Bitte wenden!-

[1] Dabei sei $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ gewählt.

Sei die affine Transformation $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $t(x) = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$. Ferner sei das *modifizierte* Tschebyscheff-Polynom $\hat{T}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\hat{T}_n(x) = \frac{(T_n \circ t)(x)}{(T_n \circ t)(x_0)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Zeigen Sie: $T_n(t(x_0)) \neq 0$ und $\max_{x \in I} \left|\hat{T}_n\right| = |(T_n \circ t)(x_0)|^{-1}$.

(b) Zeigen Sie: $\hat{T}_n$ ist eine Lösung des obigen Minimax-Problems.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Zeigen Sie, dass ansonsten das Polynom $\hat{T}_n - P \in P_n$ mindestens $n+1$ Nullstellen hätte.

Hinweis: Für beide Teilaufgaben ist es nützlich, zuerst alle Null- und Extremalstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_n in $[-1, 1]$ zu bestimmen. Benutzen Sie dazu die Teilaufgabe (b) der Aufgabe 30.

Aufgabe 32: 1 + 1 + 2 = 4 Bonuspunkte

(a) Zeigen Sie: Die Funktionenfamilie $\mathcal{F} = \{x \mapsto \exp(inx) | n \in \mathbb{Z}\}$ bildet ein *Orthogonalsystem* in $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, d.h.:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(inx)\overline{\exp(imx)}\mathrm{dx} = 0 \qquad (\forall m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } m \neq n)$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Die Funktionenfamilie $\mathcal{F}_c = \{x \mapsto \cos(nx) | n \in \mathbb{N}_0\}$ bildet ein Orthogonalsystem in $L^2([0, \pi], \mathbb{R})$, d.h.:

$$\int_{0}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{dx} = 0 \qquad (\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m \neq n)$$

Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) = \frac{\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)}{2}$.

(c) Zeigen Sie: Die Tschebyscheff-Polynome bilden ein Orthogonalsystem bezüglich des durch

$$\langle u, v \rangle_w = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)\mathrm{dx}$$

definierten gewichteten Skalarproduktes.

Hinweis: Substituieren Sie im obigen Integral $x = \cos(\alpha)$.