Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

14. Übungsblatt

Abgabe: bis Mittwoch, den 06.02.2013, 12:00
in den Kasten vor dem Seminarraum 1C-03 (Allianzgebäude)

Aufgabe 33: 2 + 1 + 2 = 5 Punkte
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Betrachten Sie eine glatte Lösung $u \in C^{2,1}(\Omega\times(0,T))\cap C(\overline{\Omega}\times[0,T])$ des folgenden *Anfangs-Randwertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \overline{\Omega}, t = 0 \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \end{aligned}$$

mit $T > 0$, $f \in C(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$ und $u_0 \in C(\overline{\Omega})$.

(a) Bestimmen Sie die schwache Formulierung des obigen Problems in $H_0^1(\Omega)$.

(b) Sei $V_h \leq H_0^1(\Omega)$ ein endlich-dimensionaler Funktionenraum. Bestimmen Sie, analog zum Vorgehen bei elliptischen Problemen, die Diskretisierung des obigen ARWPs in V_h.

Hinweis: Sie sollten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten.

(c) Zeigen Sie, dass das obige System gewöhnlicher Differentialgleichungen eine eindeutige Lösung besitzt.

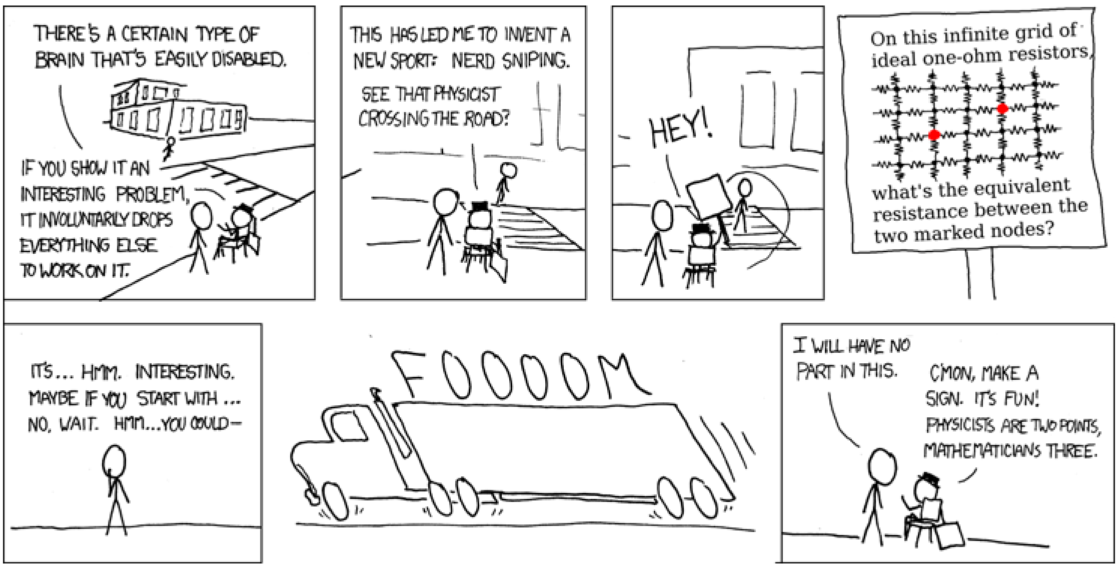
Aufgabe 34: 2 + 2 = 4 Punkte
Betrachten Sie die (formale) Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und $a_0 \neq 0$. Seien $M, N \in \mathbb{N}_0$. Eine rationale Funktion $R(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)}$ mit $P_M \in \mathbb{P}_M$ und $Q_N \in \mathbb{P}_N$ sowie $Q_N(0) = 1$ heißt *Padé-Approximant* von f der Ordnung $[M, N]$, falls für alle $n \in \{0, \dots, M+N\}$ gilt:

$$f^{(n)}(0) = R^{(n)}(0)$$

Zeigen Sie:

(a) Der Padé-Approximant ist eindeutig.

(b) Der Padé-Approximant existiert.



Quelle: http://www.xkcd.com/356/ **Urheber:** Randall Munroe