Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Man betrachte eine (klassische) Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ der Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u. \tag{1}$$

Zur Zeit $t = 0$ gelte $u, u_t = 0$ außerhalb des Balles $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^d$. Man zeige, dass die Energie

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 + c^2 (\nabla u)^2 \mathrm{dx} \tag{2}$$

zeitlich konstant ist.
Hinweis: Sie können ohne Beweis davon ausgehen, dass zum Zeitpunkt $t = T$ $u, u_t = 0$ außerhalb von $B_{cT+R}(0) \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt (*endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit*). Berechnen Sie E_t mit Hilfe der ersten Greenschen Formel (*partielle Integration*).

Lösung:
Wir wollen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} E = 0$ einsehen. Sei $t \in [0, \infty)$, $T > t$ beliebig. Bezeichne $U = B_{cT+R}(0)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} E(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 + c^2 (\nabla u)^2 \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Satz}}{\underset{1.2}{=}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \left(u_t^2 + c^2 (\nabla u)^2 \right) \mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 2 u_t u_{tt} + 2c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{\underset{\text{Ausbreitung}}{=}} 2 \int_U u_t u_{tt} \mathrm{dx} + 2c^2 \int_U \nabla u \cdot \nabla u_t \mathrm{dx}
\end{aligned} \tag{3}$$

Das zweite Integral berechnet sich mit Hilfe der ersten Greenschen Formel zu:

$$\int_U \nabla u_t \cdot \nabla u \mathrm{dx} \overset{\text{Korollar}}{\underset{1.5}{=}} - \int_U u_t \Delta u \mathrm{dx} + \int_{\partial U} u_t \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0} \mathrm{d}S \tag{4}$$

Einsetzen von (4) in (3) liefert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} E(t) = 2 \int_U u_t \left(u_{tt} - c^2 \Delta u \right) \mathrm{dx} \overset{\text{Gln.}}{\underset{(1)}{=}} 0$$

□

Aufgabe 2:
Die Potentialgleichung

$$\Delta u = 0 \tag{5}$$

sei im Kreis $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, \|x\|_2 < 1\}$ mit der Randwertvorgabe für die Ableitung in Normalenrichtung (*Neumann-Problem*)

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r, \varphi) \Big|_{r=1} = g(\varphi) \qquad \text{für } \varphi \in [-\pi, \pi], \tag{6}$$

zu lösen. Man bestimme eine Lösung, wenn $g \in C^1(\mathbb{T})$ als Fourier-Reihe ohne konstanten Term

$$g(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) \tag{7}$$

gegeben ist.

Lösung:
Die Potentialgleichung in 2D-Polarkoordinaten lautet

$$\Delta u \, (r, \varphi) = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Die Randbedingungen sind als Fourier-Reihe gegeben. Wir machen deshalb den Ansatz

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(r) \cos(k\varphi) + \beta_k(r) \sin(k\varphi) \tag{8}$$

der Fourier-Reihen in φ mit r-abhängigen Koeffizienten. Wir nehmen an (und weisen es später nach):

(i) In Ω konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha u_k$ lokal gleichmäßig für $|\alpha| \leq 2$.

(ii) Auf $\overline{\Omega}$ konvergieren die Reihen für $\sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha u_k$ gleichmäßig für $|\alpha| \leq 1$.

Dank (i) darf in Ω der Laplace-Operator in die Reihe gezogen werden:

$$\Delta u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u_k(r, \varphi)$$

Wir fordern der Einfachheit halber, dass bereits

$$\begin{aligned}
\Delta u_k(r,\varphi) &= \Delta\left[\alpha_k(r)\cos(k\varphi)+\beta_k(r)\sin(k\varphi)\right]\\
&= \left(\partial_{rr}+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}\right)\left[\alpha_k(r)\cos(k\varphi)+\beta_k(r)\sin(k\varphi)\right]\\
&= \left(\alpha_k''(r)+\frac{1}{r}\alpha_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}\right)\cos(k\varphi)+\left(\beta_k''(r)+\frac{1}{r}\beta_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}\right)\sin(k\varphi)\\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $k\in\mathbb{N}$ gelten soll. Weil die obige Gleichung für alle $\varphi\in[-\pi,\pi]$ gelten soll, müssen bereits die r-abhängigen Terme verschwinden. Damit erfüllen α_k und β_k die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$r^2w''(r)+rw'(r)-k^2w(r)=0.$$

Scharfes Hinsehen liefert eine Lösung $w_1(r)=Ar^k$. Ein noch schärferes Hinsehen bringt eine weitere Lösung $w_2(r)=Br^{-k}$. Um die Regularität von u in $r=0$ nicht zu gefährden, benutzen wir nur Lösungen der w_1-„Bauart“.
Damit ist unser Ansatz

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos(k\varphi)+B_k\sin(k\varphi)\right)r^k$$

und seine Ableitung in Normalenrichtung auf $\overline{\Omega}$ ist dank (ii)

$$u_r(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(A_k\cos(k\varphi)+B_k\sin(k\varphi)\right)r^{k-1}.$$

Da Fourier-Reihen zweier L^1-Funktionen nur dann übereinstimmen, wenn die Funktionen selbst übereinstimmen, ist für die Randbedingung

$$u_r(1,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(A_k\cos(k\varphi)+B_k\sin(k\varphi)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(k\varphi)+b_k\sin(k\varphi)=g(\varphi)$$

der Koeffizientenvergleich erlaubt und liefert $A_k=\frac{a_k}{k}$, $B_k=\frac{b_k}{k}$.
Es bleiben (i) und (ii) zu zeigen. Wegen $g\in C^1(\mathbb{T})$, gilt für die Fourier-Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}},(b_k)_{k\in\mathbb{N}}\in l^1(\mathbb{N})$. Erst recht sind diese beschränkt. Sei $S=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(|a_k|+|b_k|\right)$.

(i) Sei $0<\rho<1$. Dann gilt auf $\overline{B_\rho(0)}$ für alle $k\geq 2$ und $|\alpha|\leq 2$:

$$|D^\alpha u_k(r,\varphi)|\leq k^2(|A_k|+|B_k|)r^{k-2}\leq k(|a_k|+|b_k|)\rho^{k-2}\leq Sk\rho^{k-2}$$

Wegen $\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^{k-2}<\infty$, konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}D^\alpha u_k$, wie es zu zeigen war, gleichmäßig auf $\overline{B_\rho(0)}$.

(ii) Auf $\overline{B}_1(0)$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $|\alpha| \leq 1$:

$$|D^\alpha u_k(r, \varphi)| \leq k(|A_k| + |B_k|)r^{k-1} = |a_k| + |b_k|$$

Wegen $\sum_{k=1}^\infty |a_k| + |b_k| < \infty$, konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^\infty D^\alpha u_k$, wie es zu zeigen war, gleichmäßig auf $\overline{B_1(0)}$.

□