Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

2. Übungsblatt

Aufgabe 3:

(a) Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= -3\sin(2t) \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad (1) \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die reell-analytische Lösung $u \in C^\omega(\mathbb{R})$ durch den Potenzreihenansatz

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} t^n. \qquad (2)$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Koeffizienten $u^{(n)}(0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe der Differentialgleichung (1). Weisen Sie nach, dass die Potenzreihe (2) Konvergenzradius unendlich hat. Zeigen Sie, dass (2) das Anfangswertproblem löst.

(b) Gegeben sei das Cauchy-Problem:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times (0,\infty)\big) \\ u(x,0) &= x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x,0) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x,0) &= 2 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Berechnen Sie die reell-analytische Lösung $u \in C^\omega(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ durch den Potenzreihenansatz

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{N}_0 \\ k+l=n}} \frac{\partial_x^k \partial_y^l u(0,0)}{k! l!} x^k y^l. \qquad (3)$$

Hinweis: Die Lösung ist ein Polynom in x, y.

Lösung:

(a) Aus der Differentialgleichung (1) lässt sich $u^{(2)}(0)$ direkt bestimmen:

$$u^{(2)}(0) = -3\sin(2\cdot 0) - u(0) = 0$$

Durch n-faches Differenzieren von (1) erhält man:

$$\begin{aligned} u^{(n+2)}(0) &= -3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^n \sin(2t)|_{t=0} - u^{(n)}(0) \\ &= -3\cdot 2^n\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^n \sin(t)|_{t=0} - u^{(n)}(0) \qquad (4) \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt dann:

$$\begin{aligned} u^{(0)}(0) &= 0 \\ u^{(1)}(0) &= 2 \\ u^{(2)}(0) &= 0 \\ u^{(3)}(0) &= -8 \\ u^{(4)}(0) &= 0 \\ u^{(5)}(0) &= 32 \end{aligned}$$

Dies legt die Vermutung $u^{(2n)}(0) = 0$, $u^{(2n+1)}(0) = (-1)^n\cdot 2^{2n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ nahe. Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über n:

Der Induktionsanfang ist durch die Anfangswerte

$$u^{(2\cdot 0)}(0) = u(0) = 0, \qquad u^{(2\cdot 0+1)}(0) = (-1)^0\cdot 2^{2\cdot 0+1} = 2$$

gegeben. Gelte nun die Induktionsannahme für $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt für $n+1$ mit (4)

$$u^{(2(n+1))}(0) = -3\cdot 2^{2n}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^{2n}\sin(t)|_{t=0}}_{=\pm 0} - \underbrace{u^{(2n)}(0)}_{=0} = 0$$

sowie

$$u^{(2n+3)}(0) = -3\cdot 2^{2n+1}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^{2n+1}\sin(t)|_{t=0}}_{=(-1)^n} - \underbrace{u^{(2n+1)}(0)}_{=(-1)^n\cdot 2^{2n+1}} = (-1)^{n+1}2^{2n+3}.$$

Damit lautet der Kandidat (2)

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2t)^{2n+1} = \sin(2t).$$

Er ist tatsächlich die Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Differenzieren der Randbedingungen liefert

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,0) = 2x, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,0) = 2, \qquad \frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,0) = 0\,(k \geq 3),$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0) = -2, \qquad \frac{\partial^l}{\partial y^l}u(x,0) = 0\,(l \geq 2).$$

Die Differentialgleichung liefert

$$u_{xx}(x,y) = -u_{yy}(x,y).$$

Also ist $u_{yy}(0) = -u_{xx}(0) = -2$ und

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}u(0) = 0 \quad (k,l \in \mathbb{N}).$$

Damit sind in (3) höchstens die Koeffizienten mit $n = k+l \leq 2$ ungleich Null. Diese sind

$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = 0, \quad u_y(0) = -2, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{xx} = 2, \quad u_{yy} = -2.$$

Damit lautet der Kandidat (3)

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y.$$

Er ist tatsächlich die Lösung des Cauchy-Problems.

□

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Gegeben sei eine Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ des Intervalls $[a,b]$ mit der Feinheit

$$h_{\max} = \max_{k=0,\cdots,N-1} |x_{k+1} - x_k|\,.$$

Zeigen Sie: für jede stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion f mit

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_N) = 0,$$

gilt die Abschätzung

$$\|f\|_2 \leq h_{\max}\,\|f'\|_2\,. \tag{5}$$

Hinweis: Nach dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$f(x) = f(y) + \int_y^x f'(z)\mathrm{dz} \qquad (\forall y \leq x \in [a,b])$$

Bemerkung: Die Abschätzung (5) gilt bereits für absolut stetige f.

Lösung:
Nach dem Hinweis gilt für jedes $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ im Intervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$:

$$f(x) = \underbrace{f(x_i)}_{=0} + \int_{x_i}^{x} f'(z)\mathrm{dz} \qquad (x \in I_i)$$

Die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung liefert:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \int_{x_i}^{x} 1 \cdot f'(z)\mathrm{dz} \\
&\leq \sqrt{\int_{x_i}^{x} 1^2\mathrm{dz}} \cdot \sqrt{\int_{x_i}^{x} |f'(z)|^2 \,\mathrm{dz}} \qquad (x \in I_i) \\
&\leq \sqrt{h_{\max}} \cdot \sqrt{\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(z)|^2 \,\mathrm{dz}}
\end{aligned}$$

Quadrieren und Integrieren über I_i ergibt:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|^2 \,\mathrm{dx} \leq h_{\max}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(z)|^2 \,\mathrm{dz}$$

Durch Aufsummieren über $i \in \{0, \ldots N-1\}$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|^2 \,\mathrm{dx} \leq h_{\max}^2 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(z)|^2 \,\mathrm{dz} = h_{\max}^2 \, \|f'\|_2^2$$

und Wurzelziehen folgt die Behauptung.
□

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie den Typ (*elliptisch*, *parabolisch* oder *hyperbolisch*) der Differentialgleichungen

(a) $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0$,

(b) $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0$,

(c) $2(\partial_x + \partial_y)^2 u + \partial_y u = 0$.

Hinweis: Der Typ kann von den Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ abhängen.

Lösung:
Wir lesen die Koeffizienten der Differentialoperatoren ab:

(a)

$$a_{11} = a_{22} = 0, a_{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{hyperbolisch}$$

(b)

$$a_{11} = 1, a_{22} = y, a_{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{1}{4} - y \Rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ (hyperbolisch)} & \text{für } y < \frac{1}{4} \\ = 0 \text{ (parabolisch)} & \text{für } y = \frac{1}{4} \\ < 0 \text{ (elliptisch)} & \text{für } y > \frac{1}{4} \end{cases}$$

(c)

$$a_{11} = a_{22} = a_{12} = 2 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \Rightarrow \text{parabolisch}$$

□

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php